Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

MATEMATYKA 4

Zbiór zadań do liceów i techników

ZAKRES PODSTAWOWY

OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

Projekt okładki i strony tytułowej
Bożena Sawicka

Rysunki, skład i łamanie
AP Artepagina.com – Wojciech Prusakiewicz

Redakcja
Bernardeta Milewska

Fotografia na okładce: *Czas to matematyka*
Autor: Jan Ryl
Międzynarodowy Konkurs Fotograficzny „Matematyka w obiektywie"
www.mwo.usz.edu.pl

Druk i oprawa
Druk-Serwis Sp. z o.o.
ul. Tysiąclecia 8b, 06-400 Ciechanów

Wydrukowano na papierze *UPM* 65 g
www.antalis.pl

Wydanie I, Warszawa 2022 r.

Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.
ul. Kościańska 4, 01-695 Warszawa
pazdro@pazdro.com.pl
www.pazdro.com.pl

ISBN 978-83-7594-224-8

Spis treści

Symbolem $\mathcal{D}$ zostały oznaczone zadania na dowodzenie.

1. Funkcja wykładnicza

Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie

1.1. Oblicz:

a) $(-1{,}5)^3$ b) -2^4 c) $0{,}75^{-2}$

d) $\left(\frac{2}{3}-2^{-2}\right)^{-1}$ e) $\left(2\sqrt{2}\right)^{-3}$ f) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)^{-2}$

1.2. Oblicz:

a) $1{,}21^{\frac{1}{2}}$ b) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{2}{5}}$ c) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}$

d) $\left(8^{-\frac{1}{3}}+9^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ e) $\left[\left(\frac{216}{125}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(1\frac{1}{4}\right)^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}}$ f) $\left[8^{\frac{2}{3}}-0{,}25^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{4}{3}}$

1.3. Oblicz, korzystając z praw działań na potęgach.

a) $\dfrac{\left(7^2\cdot 7^4\right)^6}{7^{40}:7^3}$ b) $\dfrac{\left(16^{-2}\right)^3}{4^{-7}\cdot 2^{-9}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{81}\cdot 9^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{7}{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{27}}}$

d) $8:13^{\frac{1}{2}}\cdot 52^{0{,}5}$ e) $\sqrt{75}:3^{1\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{5}{6}}$ f) $\left(18^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}:27^{-\frac{1}{6}}\right)^{-1{,}2}$

1.4. Przedstaw daną liczbę w postaci n^w, gdzie n jest liczbą naturalną, a w jest liczbą wymierną.

a) $\sqrt[3]{16}\cdot 0{,}125^{-0{,}5}$ b) $\sqrt[4]{125^3}\cdot 0{,}008^{-\frac{1}{3}}$ c) $\dfrac{0{,}5^{-4}\cdot 81}{\sqrt[3]{216^{0{,}6}}}$

d) $\dfrac{81^{-0{,}75}\cdot 12^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{72}}$ e) $\sqrt[4]{16^{-\frac{2}{3}}\cdot 8\sqrt[3]{4}}$ f) $\dfrac{\sqrt[5]{\frac{1}{16}}\cdot 5^{-0{,}4}}{50\cdot 2^{0{,}6}}$

1.5. Oblicz wartość wyrażeń.

a) $\sqrt{9}\cdot\left[1{,}5^{-1}+9^{-1{,}5}\right]-27^{-\frac{2}{3}}$

b) $\left[\left(\frac{81}{625}\right)^{-0{,}75}:\left(1\frac{2}{3}\right)^{3}-0{,}125^{\frac{1}{3}}\right]^{-2}$

c) $\sqrt[3]{0{,}375}\cdot\sqrt[3]{9}+\left(3^{-1}-\sqrt[4]{\frac{16}{81}}\right)^{-2}$

d) $\left[\frac{125^{\frac{2}{3}}-0{,}2^{-1}}{0{,}5^{-2}}\cdot 0{,}2^{-3}\right]^{\frac{3}{4}}$

1.6. Oblicz wartość wyrażeń.

a) $\frac{\left(3^{1{,}5}-\sqrt{3}\right)\left(3^{1{,}5}+\sqrt{3}\right)}{12^{\frac{1}{3}}\cdot 12^{\frac{1}{3}}\cdot 12^{\frac{1}{3}}}$

b) $\left(4^{-\frac{2}{3}}+4^{-\frac{2}{3}}+4^{-\frac{2}{3}}+4^{-\frac{2}{3}}\right)^{4}:32^{\frac{1}{3}}$

c) $\left(10\sqrt{2}-5\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(10\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

d) $\left[\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{3-\sqrt{5}}\right]^{3+\sqrt{5}}$

D **1.7.** Wykaż, że liczba $\frac{6^{-14}+12\cdot 6^{-15}}{0{,}5^{14}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{15}}$ stanowi 3750% liczby $\frac{5^{-20}+5^{-19}}{125^{-6}}$.

D **1.8.** Wykaż, że:

a) $\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{6}}\cdot\left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{3}}}{45^{\frac{1}{2}}\cdot 0{,}75^{-1}}=\frac{\sqrt{5}}{30}$

b) $\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^{-3}\cdot 18^{\frac{1}{2}}:6^{-\frac{3}{2}}}{31{,}25^{-\frac{1}{3}}}=\frac{15\sqrt[3]{2}}{4}$

1.9. Wiadomo, że przybliżenie dziesiętne liczby $100^{\frac{1}{3}}$ jest równe 4,641588834. Podaj przybliżenie dziesiętne podanych niżej liczb. Wynik zaokrąglij do piątego miejsca po przecinku.

a) $100^{\frac{4}{3}}$ b) $100^{-\frac{5}{3}}$ c) $100^{\frac{5}{6}}$ d) $100^{\frac{1}{6}}$

1.10. Oblicz, o ile procent:

a) liczba a jest większa od liczby b, jeśli $a=\sqrt{666^2+888^2}$, $b=\frac{\sqrt[3]{32}\cdot 625^{0{,}5}\cdot\sqrt[3]{2}}{2^{-3}}$,

b) liczba x jest mniejsza od liczy y, jeśli $x=\left(\frac{27^{-9}+81^{-7}}{9^{-13}}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $y=\frac{\sqrt[6]{60}\cdot\sqrt[3]{60}\cdot\sqrt{60}}{15}$.

1.11. Porównaj liczby x i y, jeśli:

a) $x=\left(3\sqrt{3}\right)^{12}$, $y=243\cdot 9^6$

b) $x=\frac{8\cdot 0{,}5^{-9}}{16^{-1}}$, $y=81^4$

c) $x=\left[\left(2-\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$, $y=\sqrt[3]{2}$

d) $x=\left(3^{-\frac{1}{2}}+1\right)^{-2}$, $y=\frac{6-3\sqrt{3}}{2}$

e) $x=\left[\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, $y=\left(3^{2\sqrt{2}-1}\right)^{2\sqrt{2}-1}$

f) $x=4^{12}-9^6$, $y=2^{12}+3^6$

D **1.12.** Wykaż, że dana liczba jest liczbą naturalną.

a) $\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(5\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{50}+\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{1}{3}}$

b) $\left[\left(6+\sqrt{11}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(6-\sqrt{11}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

D **1.13.** Wykaż, że dana liczba jest liczbą całkowitą.

a) $\left[\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\cdot\left(2-2\sqrt{5}\right)$

b) $\left(9-4\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(6-2\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

c) $\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(49+20\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{4}}$

d) $\left(17-288^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(3+8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

1.14. Rozwiąż równania.

a) $x^2\cdot\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)=\sqrt{48}-\sqrt{32}$

b) $4^{-0{,}25}-2^{0{,}5}=\frac{2{,}5-4x}{4^{-0{,}25}+\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}}$

c) $\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)^2\cdot(x-2)}{2}=\frac{2}{\left(3+\sqrt{5}\right)^2\cdot(x-2)}$

d) $\frac{x+5{,}5}{14}\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)=\frac{\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)}{8^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{2}}}$

1.15. Rozwiąż nierówności.

a) $\left(2\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+1\right)>7+\sqrt{3}$

b) $(2x-1)^2 \geqslant \dfrac{\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}+1\right)\left(\sqrt[3]{7}+1\right)}{2}$

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)x<\dfrac{x^2+(0,25)^{-1}\cdot x+8^{\frac{2}{3}}}{1-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{x^2+12}{\sqrt{3}+1}>\left(6-2\sqrt{3}\right)\cdot x$

1.16. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\dfrac{a^{-2}-\dfrac{4}{b^2}}{a^{-1}-2b^{-1}}$, jeśli $a=1-\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$

b) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{ab}\right)^{-2}\cdot\left(a^{-3}+b^{-3}\right)}{2a^2-2ab+2b^2}$, jeśli $a=\sqrt{3}-1$, $b=\sqrt{3}+1$

D **1.17.** Wykaż, nie korzystając z kalkulatora, że:

a) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)^2>\sqrt[3]{\dfrac{1}{30}}$

b) $\left(\sqrt{5-\sqrt{2}}+\sqrt{5+\sqrt{2}}\right)^2>10+4\sqrt{5}$

D **1.18.** Wykaż, że jeśli $x>0$ i $y>0$, to $\dfrac{xy^{\frac{1}{2}}+\dfrac{y}{x^{-\frac{1}{2}}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{xy}$.

D **1.19.** Wykaż, że jeśli $a\neq 0$ i $a\neq -b$, to $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^{-1}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}\right)=a$.

D **1.20.** Wykaż, że jeśli $a<0$ i $b<0$, to $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}\geqslant\dfrac{2b-a}{b}$.

Funkcja wykładnicza i jej własności

1.21. Dany jest wzór funkcji wykładniczej f. Naszkicuj wykres tej funkcji i omów jej własności.

a) $f(x)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ b) $f(x)=0{,}4^x$ c) $f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^x$ d) $f(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$

1.22. Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby x, y, z, t, jeśli:

a) $x=\left(\sqrt{3}\right)^{2\sqrt{2}}$, $y=\left(\sqrt{3}\right)^{1+\sqrt{2}}$, $z=\left(\sqrt{3}\right)^{\pi}$, $t=\left(\sqrt{3}\right)^{-2+\sqrt{3}}$

b) $x=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-\sqrt{5}}$, $y=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{0,(6)}$, $z=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\frac{3}{5}}$, $t=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{0}$

c) $x=0{,}125^{\frac{2}{3}}$, $y=16^{-\sqrt{3}}$, $z=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2-\pi}$, $t=\left(\sqrt[6]{128}\right)^{\frac{3\sqrt{2}}{7}}$

d) $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$, $y=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}\right)^{-1}$, $z=\left(\dfrac{\sqrt{125}+10}{5}\right)^{-\frac{3}{2}}$, $t=\left|\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}\right|^{\frac{1}{2}}$

1.23. Podaj, jaki związek zachodzi między wykładnikami m i n, jeśli:

a) $\left(1+\sqrt{2}\right)^m>\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^n$

b) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^m<\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^n$

c) $\left(\sqrt{2\sqrt{2}}\right)^m<\left(\sqrt[4]{8}\right)^n$

d) $\left[\left(\sqrt{3}-1\right)^2\right]^m<\left(4-2\sqrt{3}\right)^n$

1.24. Określ, czy liczba x jest dodatnia, czy ujemna, jeśli:

a) $6^x=2$ b) $0{,}12^x=4$ c) $\left(\sqrt{5}\right)^x=0{,}4$

d) $10^x=\sqrt{3}+2$ e) $0{,}75^x=2\sqrt{2}-1$ f) $\left(\dfrac{8}{3}\right)^x=8^{-\frac{1}{3}}$

1.25. Napisz wzór funkcji wykładniczej f wiedząc, że do jej wykresu należy punkt:

a) $B\left(-1,\dfrac{1}{4}\right)$ b) $C(-2,\ 25)$ c) $D(4,\ 64)$

1.26. Do wykresu funkcji wykładniczej f należy punkt $A(-2, 4)$.

a) Napisz wzór funkcji f i naszkicuj jej wykres.

b) Oblicz wartość tej funkcji dla argumentu $-1\frac{1}{2}$.

c) Podaj argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość 8.

d) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 2.

1.27. Do wykresu funkcji wykładniczej g należy punkt $B\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

a) Napisz wzór funkcji g i naszkicuj jej wykres.

b) Oblicz wartość tej funkcji dla argumentu $-0{,}75$.

c) Podaj argument, dla którego funkcja g przyjmuje wartość 8.

d) Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $1 \leqslant g(x) < 16$.

1.28. Rozwiąż dane równanie. Skorzystaj z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $2^x = \frac{2}{x}$ b) $(x+2)^2 + 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $4^x = \left|1 - \frac{x}{2}\right|$

1.29. Rozwiąż daną nierówność. Skorzystaj z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $\left(\sqrt{2}\right)^x < 6 - 2x$ b) $3^x \geqslant -2x^2 + 4x + 1$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{2}{x} \leqslant 0$

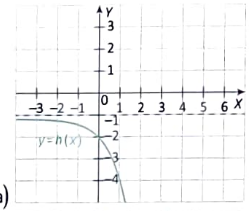
Przekształcenia wykresów funkcji wykładniczych

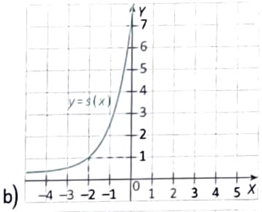
1.30. Wykres funkcji $f(x) = 3^x$, $x \in \mathbb{R}$, przekształcono i otrzymano wykres funkcji g. Napisz wzór funkcji g i opisz to przekształcenie.

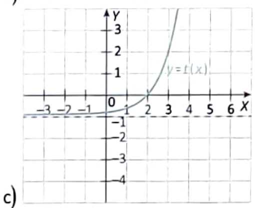
a) $g(x) = f(x - 2)$ b) $g(x) = 1 - f(-x)$

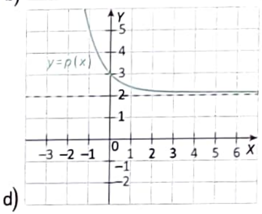
c) $g(x) = -f(x + 1) - 3$ d) $g(x) = f(4 - x) + 5$

1.31. Na rysunkach na następnej stronie są przedstawione wykresy funkcji, które powstały w pewnym przekształceniu wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = 3^x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Podaj wzory tych funkcji.

a)


b)


c)


d)


1.32. Dany jest wzór funkcji, określonej w zbiorze $\mathbb{R}$. Naszkicuj wykres tej funkcji i omów jej własności.

a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ b) $y = -1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ c) $y = 2^{1-x} + 3$ d) $y = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-x-1}$

1.33. Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = 2^x$ przesunięto równolegle o wektor $\vec{u} = [2, -1]$. Następnie otrzymany wykres przekształcono przez symetrię osiową względem osi OY i otrzymano wykres funkcji g.

a) Naszkicuj wykres funkcji g i napisz wzór tej funkcji.

b) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji g i osi OY.

c) Czy punkt $A(-42,\ 16^{10} - 3^0)$ należy do wykresu funkcji g?

1.34. Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi OX. Następnie otrzymany wykres przesunięto równolegle o wektor $\vec{v} = [-2, 1]$ i otrzymano wykres funkcji g.

a) Naszkicuj wykres funkcji g i napisz wzór tej funkcji.

b) Oblicz wartość funkcji g dla argumentu -6.

c) Odczytaj z wykresu zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja g przyjmuje wartości dodatnie.

1.35. Wykres funkcji wykładniczej $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ przekształcono przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$. Następnie otrzymany wykres przesunięto równolegle o wektor $\vec{u}=[3,2]$ i otrzymano wykres funkcji g.

a) Naszkicuj wykres funkcji g i napisz wzór tej funkcji.

D b) Uzasadnij, że miejscem zerowym funkcji g jest liczba $3\frac{1}{2}$.

c) Rozwiąż graficznie nierówność $g(x)-\frac{1}{3}x\geqslant 0$.

1.36. Wykres funkcji f przesunięto równolegle o wektor $\vec{u}$ i otrzymano wykres funkcji h. Podaj wzór funkcji h.

a) $f(x) = 4 - 5^{x-2}$, $\vec{u}=[5,-7]$ b) $f(x) = 7^{3-x}+1$, $\vec{u}=[-8,3]$

1.37. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{1}{3^x}$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

a) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x + 1) - 4$.

b) Oblicz wartość wyrażenia $[g(-3) \cdot g(-2)]^2$.

c) Na podstawie wykresu funkcji g rozwiąż nierówność $g(x) > -1$.

1.38. Dana jest funkcja $f(x) = 4^{-x}$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

a) Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=f\left(-\frac{1}{2}x\right)-2$.

b) Sprawdź, czy liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji g. Dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości nieujemne?

c) Czy do wykresu funkcji g należy punkt $C\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}-2\right)$?

1.39. Rozwiąż równania, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $2^x = 8$ b) $7^{x-1} = 0$ c) $9\cdot 3^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

d) $0{,}5^{x+3}=\frac{1}{8}\cdot 2^{-x}$ e) $4^{x+2} - 3 = 5^{x+1}$ f) $0{,}25^{-\frac{1}{2}x+1{,}5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}-1$

1.40. Rozwiąż równania, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $3^x=\frac{3}{x}$ b) $-2^{x-1}=\frac{1-3x}{2}$ c) $2^{x+3}-4=\frac{-3}{4}\cdot(x+1)^2$

1.41. Rozwiąż nierówności, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $2^{x+1}\leqslant 4$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x<9^{x+1}+2$ c) $25^{\frac{1}{2}x}-4\leqslant 0{,}5^{x-1}$

d) $3^x - 2 \leqslant -0{,}5^x$ e) $64^{\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ f) $\frac{2^{x-1}+8}{2}>3-2^{x-4}$

1.42. Rozwiąż nierówności, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $2^{x-2}\leqslant 5-x$ b) $\frac{-2}{x}<2^{-x}$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^x\geqslant -x^2+3\frac{3}{4}x-1\frac{1}{4}$

1.43. Do wykresu funkcji $f(x) = b \cdot a^x$, gdzie $a \in \mathbf{R}_+ - \{1\}$, $b \in \mathbf{R}$ i $x \in \mathbf{R}$, należy punkt $P(5, 27)$. Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie o rzędnej $\frac{1}{9}$.

a) Wyznacz liczby a i b.

b) Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \leqslant 4 - 2^{x-3}$.

1.44. Do wykresu funkcji $g(x) = c \cdot a^x$, gdzie $a \in \mathbf{R}_+ - \{1\}$, $c \in \mathbf{R}$ i $x\in \mathbf{R}$, należą punkty $K\left(-2,\frac{1}{16}\right)$ oraz $L(1, 32)$.

a) Oblicz współczynniki a, c.

b) Naszkicuj wykres funkcji h określonej wzorem $h(x)=g\left(-\frac{x}{3}\right)+1$.

c) Rozwiąż graficznie równanie $h(x) = 3^x$.

Równania wykładnicze

1.45. Rozwiąż równania.

a) $6^x = 216$ b) $0{,}4^x = 0{,}16$ c) $\left(2\frac{1}{3}\right)^x=0$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^x=\frac{4}{3}$ e) $\left(\frac{3}{8}\right)^x=18\frac{26}{27}$ f) $\sqrt{75^x}=1$

1.46. Rozwiąż równania.

a) $0{,}75^{x+5}=\left(1\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ b) $\left(6\frac{1}{4}\right)^{2x-1}=0{,}4^{3x-12}$ c) $\left(1\frac{1}{6}\right)^{2x-4}-\left(\frac{6}{7}\right)^{x+2}=0$

d) $0{,}5^{3x-4}=8^{2x+1}$ e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}-8^{-x}=0$ f) $5^{\frac{2}{x-1}}=0{,}04^3$

1.47. Rozwiąż równania.

a) $2^{|x-1|}=8$ b) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{|2+x|}=25$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{|x+5|+1}=\left(2\frac{1}{4}\right)^3$

d) $\left(\sqrt{125}\right)^{|3-x|}=5^{|3-x|}$ e) $4\cdot 2^{|-x-1|}=16^{|x+1|}$ f) $\frac{27}{9^{|x-4|}}=3^{|4-x|}$

1.48. Rozwiąż równania.

a) $3^{x^2}=9^{x-0,5}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2}=\left(2\frac{1}{4}\right)^2$ c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+x}=\left(2\frac{1}{2}\right)^{2x^2}$

d) $4^{x+2}-2^{x^2-x}=0$ e) $\left(\frac{3}{4}\right)^x-\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{2x-2}{x}}=0$ f) $2^{\frac{x}{1-x}}-\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{x+2}}=0$

1.49. Rozwiąż równania.

a) $\frac{4^x}{2}=4^{\frac{1}{x+1}}$ b) $2^{x^3+x^2}=32\cdot 2^{5x}$ c) $\sqrt[3]{3^{x-2}}=9^{\frac{(x-1)^2}{2x}}$

d) $\left(\frac{25}{81}\right)^{x^3}=\frac{5}{9}\cdot 1{,}8^{2x-x^2}$ e) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x+1}{x}}$ f) $\frac{4^{x^3}}{\sqrt{1024}}=\frac{16^{\frac{x}{2}}}{64^{\frac{x^2}{2}}\left(\sqrt[3]{8}\right)^{2x^3}}$

1.50. Rozwiąż równania.

a) $\left(\sqrt{8}\right)^x\cdot 2^{3x-4,5}=\left(\frac{1}{64}\right)^{x-1}$ b) $\left(125\sqrt{5}\right)^{2x}=5^{x^2+10}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x}\cdot 8^x=\frac{2^{x-1}}{8}$

d) $\frac{3^{x^3}}{\left(\sqrt[4]{3}\right)^{4x+4}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$ e) $\frac{5^{x^2}}{\left(5\sqrt{5}\right)^x}=\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{11x-20}{x-1}}$ f) $\sqrt[3]{8^{\frac{1}{x}}\cdot 8^{\frac{2}{x-1}}}=\left(\sqrt[4]{4}\right)^{2x+1}$

1.51. Rozwiąż równania.

a) $2^{x+2}-2^{x-1}=14$ b) $5\cdot 4^x-2^{2x-3}=39$

c) $3^{2x}+\frac{4}{27}=2\cdot 3^{2x+1}-9^x$ d) $125^x-2\cdot 5^{3x+1}=1\frac{4}{5}$

1.52. Rozwiąż równania, wprowadzając pomocniczą niewiadomą.

a) $2^{x+3}+2^{3-x}=65$ b) $2^{4x}+8=5\cdot 4^x$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}-24\cdot 5^{-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ d) $4^x+\frac{3}{2}=4^{-x}$

1.53. Rozwiąż równania, wprowadzając pomocniczą niewiadomą.

a) $\frac{6^x-2}{6^x+6}=\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ b) $\frac{3^x+2}{3^x+3}-\frac{3^x-2}{3^x-3}=0$

c) $(3^x-6^x)\cdot(9^x+18^x+36^x)=0$ d) $4^{3x}-7\cdot 4^{2x}=8-14\cdot 4^x$

e) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x-2\right]\cdot\left[3^{-2x}+\frac{2}{3^x}+4\right]=1$ f) $\frac{25^x-5^x+1}{126}=\frac{1}{5^x+1}$

1.54. Rozwiąż równania.

a) $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=4$ b) $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x=6$

1.55. Rozwiąż równania.

a) $5^{3-2x}=2^{2x-3}$ b) $3^{x+2}=25\cdot 5^x$

c) $\frac{3\cdot 3^{2x+5}}{3^x}=2^{x+6}$ d) $5^{x+2}\cdot 7^{2x+4}=21^{x+2}$

e) $2^{5x-1}\cdot 3^{3x-1}=6^{x+8}\cdot 4^x$ f) $9^{3x+2}\cdot 5^{10x+4}=15^{3x+2}\cdot 25^{2x}$

D **1.56.** Wykaż, że:

a) jeśli $9^x+25^x=2\cdot 15^x$, to $2^x<\sqrt{3}$ b) jeśli $16^x+4^{x+1}=4\cdot 8^x$, to $3^x>\sqrt{5}$.

1.57. Rozwiąż równania wiedząc, że $n\in \boldsymbol{N}_+$.

a) $5^{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}=0{,}2^{100-20n}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^9\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3n}=1{,}5^{-30}$

1.58. Liczby 4, $3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{2x-4}$, $\frac{5}{2^{2-x}}$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n).

a) Wyznacz x.

b) Podaj wzór na wyraz ogólny ciągu (a_n).

c) Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

1.59. Liczby $2^{x+2}+4$, $10\cdot 2^x-2$, $9\cdot(2^x+1)$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n).

a) Oblicz x.

b) Wyznacz iloraz ciągu (b_n).

c) Podaj wyraz ogólny ciągu (b_n).

Nierówności wykładnicze

1.60. Rozwiąż nierówności.

a) $\frac{1}{2^x}>16$ b) $0,6^{2x}\leqslant 2\frac{7}{9}$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-2}>-\left(\frac{4}{3}\right)^0$

d) $0,8^{2x-1}\geqslant 1,25^{x+2}$ e) $\left(\sqrt[3]{\frac{49}{81}}\right)^{x-4}<\left(\frac{7}{9}\right)^{3x}$ f) $\frac{1}{25}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{3-4x}\leqslant 0,04^{x+1}$

1.61. Rozwiąż nierówności.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\leqslant 1,5^{|x+2|}$ b) $\left(2\sqrt{2}\right)^{|x-1|}<4$

c) $\left(6\frac{1}{4}\right)^{|2-x|}-\left(\frac{5}{2}\right)^{3|x-2|}\geqslant 0$ d) $9\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{|x+4|}\geqslant\left(9\sqrt[4]{3}\right)^{|-x-4|}$

1.62. Rozwiąż nierówności.

a) $4^{2x^2+5x}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-4}$ b) $0,75^{x^2}<\frac{64}{27}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x$ c) $4^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{x+1}<16^{x+3}$

d) $\left(\frac{1}{125}\right)^{x^2-x}<0,2^x\cdot 5^{x^2+1}$ e) $\frac{1}{3^{5x-2}}>3^{3x^2}$ f) $\left(\sqrt{2}\right)^{4x^2}\geqslant\frac{4^{2x}}{\left(2\sqrt{2}\right)^{-4}}$

1.63. Rozwiąż nierówności.

a) $\left(\frac{1}{64}\right)^{x-1}\cdot 16^{x-4}<0,25^{4x+8}$ b) $\left(\frac{4}{25}\right)^{x-2}\cdot\left(\frac{125}{8}\right)^{x-2}<2,5^{2x+5}$

c) $\frac{5^{x+4}}{25^{x-1}}<0,2^{x^2}$ d) $\frac{3^{4-21x}}{9^{-x^2}}>\frac{3^{-7x^2}}{27^{4-x}}$

e) $\frac{16^x}{4^{x^2}}\leqslant\frac{0,5^x}{2^{x-4}}$ f) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{3x+12}\geqslant\frac{49^{1-x^2}}{7^{x+1}}$

1.64. Rozwiąż nierówności.

a) $2^{x+5}+5\cdot 2^{x+2}<34-2^{x+4}$ b) $3^{x-1}+2\cdot 3^{x+1}>48+3^x$

c) $0,4^{x+3}+2,5^{-x-2}\leqslant\frac{7}{2}$ d) $3\cdot 2^{x-5}+\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0,5x}-11\leqslant 0$

1.65. Rozwiąż nierówności.

a) $\left(\frac{27}{8}\right)^{x^2+x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x<\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}$ b) $\frac{64}{2^{x^2}}>\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2}\cdot\left(\frac{16}{3}\right)^{x^2-1}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-4}\cdot\left(\frac{81}{16}\right)^{x-2}\leqslant 2,25^{4x+1}$ d) $\frac{8^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{2x}}{4^{0,5x^2}}<\frac{1}{64}$

1.66. Rozwiąż nierówności, wprowadzając pomocniczą niewiadomą.

a) $\left(2^x+3\right)\left(32-2^x\right)\geqslant 0$ b) $\left(5^x-0,2\right)\left(5^x-125\right)>0$

c) $16^x+9\cdot 2^{2x}+8<0$ d) $9^x<2\cdot 3^x+3$

e) $8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{8x}+27\geqslant 30\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4x}$ f) $4^{1-3x}+1\leqslant\frac{4}{8^x}$

1.67. Rozwiąż nierówności.

a) $2^{3x-2}\geqslant 5^{x-\frac{2}{3}}$ b) $7^{x+3}<3^{2x+6}$

c) $2,1^{x+1}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^{x+1}<\left(\frac{5}{6}\right)^x\cdot 1,2$ d) $13\cdot 14^{3x}+2^{3x}\cdot 7^{3x}\leqslant 1$

e) $\frac{2^{x-4}}{3^{8-2x}}\leqslant\frac{3^{x-4}}{6^{4-x}}$ f) $6^{2x+4}-3^{3x}\cdot 2^{x+8}>0$

1.68. Rozwiąż nierówności wiedząc, że $n \in \mathbb{N}_+$.

a) $0{,}7^{2+4+6+\ldots+2n} \geqslant 0{,}7^{12}$

b) $2^5 \cdot 2^8 \cdot 2^{11} \cdot \ldots \cdot 2^{3n+2} < 16^{31}$

D **1.69.** Wykaż, że jeśli $n \in \mathbb{N}_+$, to $3^{2n} \geqslant 3^n + 6$.

D **1.70.** Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność:

a) $8^x + 2^x \geqslant 2 \cdot 4^x$

b) $4^{x-0{,}5} + 0{,}5 \cdot 25^x \geqslant 10^x$

Test sprawdzający do rozdziału 1.

1. Liczba $7^6 + 3 \cdot 7^5 + 7^4$ jest podzielna przez:

A. 35 B. 39 C. 71 D. 14

2. Liczba $\left[\left(3^{1-\sqrt{2}}\right)^{1+\sqrt{2}} - 1\right]^{-1}$ jest równa:

A. 2 B. $1\frac{1}{2}$ C. $\frac{-2}{3}$ D. $-1\frac{1}{2}$

3. Liczba $8^{1,5} - 2^{2,5}$ jest równa:

A. $3 \cdot 2^{2,5}$ B. 4^{-1} C. $6^{\frac{3}{5}}$ D. $\frac{1}{6}$

4. Suma rozwiązań równania $(0{,}2^x - 125)(5^{3x} - 1) = 0$ wynosi:

A. 3 B. $-2\frac{2}{3}$ C. $2\frac{2}{3}$ D. -3

5. Rozwiązaniem równania $2^{-0,5} - 1 = \frac{2x}{2^{-0,5} + 1}$ jest liczba należąca do przedziału:

A. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

6. Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ należy punkt $P\left(-2, \frac{1}{2}\right)$. Wówczas dla argumentu $\frac{2}{3}$ wartość funkcji f wynosi:

A. $\frac{1}{8}$ B. $\sqrt[3]{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 0,25

7. Wykres funkcji $f(x) = 2^{x-1}$ przesunięto o 3 jednostki w lewo. Wówczas otrzymano wykres funkcji:

A. $y = 4 \cdot 2^x$ B. $y = 8 \cdot 2^x$ C. $y = 2^{x-4}$ D. $y = 2^{x-1} - 3$

8. Wykres funkcji $f(x) = -3^x + 2$ przekształcono przez symetrię środkową względem punktu $(0, 0)$. Wówczas otrzymano wykres funkcji:

A. $y = 3^x + 2$ B. $y = 3^x - 2$ C. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$ D. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$

9. Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{1}{2^x} - 8 > 0$ jest przedział:

A. $(-\infty, 3)$ B. $(-\infty, -3)$ C. $(-3, +\infty)$ D. $(3, +\infty)$

10. Wiadomo, że $\left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right)^x = \sqrt{6} + \sqrt{5}$. Wówczas:

A. $x = -\frac{1}{2}$ B. $x = 2$ C. $x = -1$ D. $x = -2$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

11. Oblicz:

a) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - 4^{-1}\right]^{-2}$

b) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,75}\right]^2 - 2^{2,25} \cdot 3^{0,5} \cdot \sqrt[4]{8}$

c) $\sqrt[8]{\left(3^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt[3]{9}}$

d) $\left(5^{-\frac{1}{2}} + 5^{-\frac{1}{2}} + 5^{-\frac{1}{2}} + 5^{-\frac{1}{2}} + 5^{-\frac{1}{2}}\right)^4$

12. Oblicz wartość wyrażenia $\left[x^{-1} + 0{,}5y^{-\frac{1}{2}}\right] \cdot \frac{2\sqrt{y} - x}{\sqrt{y}}$ dla $x = 2$ i $y = \sqrt{3}$.

D **13.** Dane są liczby $a = \sqrt[5]{8 \cdot \sqrt{2\sqrt{2}}}$ oraz $b = 128^{\frac{1}{9}}$. Wykaż, że $b > a$.

D **14.** Wykaż, że liczba $\frac{444444444^{-2}}{555555555^{-2}}$ należy do przedziału $\left(1\frac{1}{2}, 2\right)$.

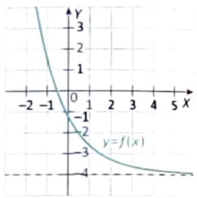
D 15. Wykaż, że liczba $\left[\left(2-\sqrt[3]{7}\right)\left(4+2\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}\right)\right]^{0,4}$ jest rozwiązaniem równania $x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1=0$.

D 16. Wykaż, że liczba $\left(3^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{4}}\right)\left(2^{\frac{1}{2}}+3\right)\left(2^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{2}}\right)$ jest liczbą pierwszą.

D 17. Wykaż, że jeśli $a=\left(\sqrt{3}-1\right)^2\cdot\left(4+\sqrt{12}\right)$ i $b=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{5}$, to $a^b=0{,}25$.

D 18. Wykaż, że jeśli $a\neq 0$, $b\neq 0$, $ab\neq -1$, to $\left(\frac{1}{a}-b\right)\cdot\frac{2a^2}{1+ab}\cdot\left(b+a^{-1}\right)+2ab=2$.

19. Rysunek obok przedstawia wykres funkcji $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1,5}-4$, gdzie $x\in \mathbf{R}$.



a) Wyznacz miejsce zerowe funkcji f.

b) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $-2{,}5$.

c) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości ujemne?

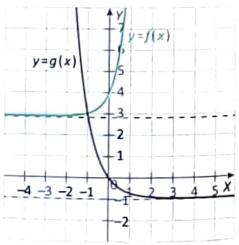
d) Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=-f(-x)$ i podaj jej wzór.

20. Funkcje $f(x)=3^{x-1}-3$ oraz $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+a+7$ są określone w zbiorze $\mathbf{R}$ i mają wspólne miejsce zerowe. Oblicz a. Następnie:

a) naszkicuj wykresy funkcji f i g we wspólnym układzie współrzędnych,

b) podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x)>g(x)$.

21. Wykresy funkcji $f(x)=8^x+b$ oraz $g(x)=a^x-1$, gdzie $x\in\mathbf{R}$, przecinają się w punkcie $P(-1,3)$, jak na rysunku obok.



a) Odczytaj z rysunku zbiór rozwiązań nierówności $f(x)\leqslant g(x)$.

b) Wyznacz a i b.

c) Oblicz $f\left(\frac{2}{3}\right)+g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

d) Wykres funkcji g przesunięto wzdłuż osi OY do góry i otrzymano wykres funkcji h, który przecina się z wykresem funkcji f na osi OY. Podaj wzór funkcji h.

22. Do wykresu funkcji $f(x)=a^x+b$, gdzie $x\in\mathbf{R}$, należą punkty $A(1,-5)$ i $B(2,-3)$.

a) Oblicz a i b.

b) Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od 25.

D c) Wykaż, że jeśli $f\left(\frac{k}{2}\right)=1$ i $f(p+1)=9$, to k^2+p^2 jest liczbą podzielną przez 5.

23. Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których:

a) funkcje $f(x)=\left(3\sqrt{3}\right)^{2x-1}$ oraz $g(x)=81^{x-2}$ przyjmują tę samą wartość

b) funkcja $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-5}$ przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x)=\left(\frac{9}{4}\right)^{5x+1}$

c) funkcja $h(x)=9^{|3x-2|}-1$ przyjmuje wartości większe od 8.

24. Pewna substancja radioaktywna ma masę 50 gramów, a rozpad tej substancji powoduje zmniejszenie jej masy o 20% każdego roku.

a) Napisz wzór funkcji $M(t)$ opisującej masę tej substancji po czasie t, gdzie t – czas liczony w latach.

b) Oblicz, po jakim czasie masa substancji będzie równa 25,6 grama.

25. Rozwiąż równania.

a) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^x=3^{\frac{1}{2x+1}}$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+\frac{1}{2}}\cdot\left(6\frac{1}{4}\right)^{-2x}=\left(\sqrt{0{,}4}\right)^{4x-x^2}$

c) $\frac{2^{x^3}}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^{12}}=\frac{4^{2x}}{2^{x^2}}$

d) $4^{x+2}\cdot 3^{2x+4}=25\cdot 0{,}2^{-x}$

e) $3^{|x+1|+1}-5\cdot 3^{|x+1|-1}=12$

f) $3\cdot 2^{3x-1}+\sqrt{2}\cdot 8^{x+0{,}5}=4^{1{,}5(x-1)}+86$

26. Rozwiąż nierówności.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} > \left(\frac{27}{8}\right)^{x-3}$

b) $0{,}4^{|x-6|} \leqslant 2{,}5$

c) $(3^{x+2}-1)(9^x+27) < 0$

d) $\dfrac{5^{x^2}}{\left(\sqrt{5}\right)^{x+0{,}5}} \geqslant \sqrt[4]{5}$

e) $2^{2x+1} - 17 \cdot 2^x + 8 > 0$

f) $6^x - 3 \cdot 5^x < 10^x - 3^{x+1}$

2. Funkcja logarytmiczna

Logarytm – powtórzenie wiadomości

2.1. Oblicz:

a) $\log_2 128$ b) $\log_{\frac{2}{3}} 1{,}5$ c) $\log_\pi 1$ d) $\log_{0{,}4} 15\frac{5}{8}$

e) $\log_{1{,}6} \frac{64}{25}$ f) $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}$ g) $\log_4 2$ h) $\log_{625} 0{,}2$

2.2. Oblicz:

a) $\log_{\sqrt[3]{3}} 9\sqrt{3}$ b) $\log_{0{,}2} 5\sqrt[6]{5}$ c) $\log_{\frac{1}{6}} 36\sqrt[3]{6}$ d) $\log_{\sqrt{3}} 27\sqrt[4]{3}$

e) $\log_{\frac{1}{2}} 16\sqrt[3]{2}$ f) $\log_{\frac{\sqrt[4]{3}}{3}} 81\sqrt[3]{3}$ g) $\log_5 \dfrac{25\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{125}}$ h) $\log_{\sqrt[3]{4\sqrt{2}}} 16\sqrt[5]{8\sqrt[3]{2}}$

2.3. Liczby A, B, k, p, t, są dodatnie i różne od 1. Wyznacz z danego wzoru wskazaną wielkość.

a) $B = t \cdot A^k - 1;\ k$ b) $t = B \cdot A^{p-k};\ p$ c) $\frac{2A}{B} = 4 \cdot p^{-t} - k;\ t$

d) $B = 2\log_p A;\ A$ e) $A = \log(B+t) - k;\ t$ f) $t = \log\frac{A}{p} + \log\frac{p}{A^2};\ A$

2.4. Oblicz:

a) $\log_2 48 - \log_2 3$ b) $\log_3 \frac{1}{6} + \log_3 \frac{2}{3}$ c) $2\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3} + \log_{\frac{1}{2}} 5\frac{1}{3}$

d) $(\log_5 16 - \log_5 80)^2$ e) $\log_{\frac{2}{3}} 4 - 2\log_{\frac{2}{3}} 3$ f) $2\log_{\frac{1}{4}} 8 - 3\log_{\sqrt{3}} 9$

2.5. Przedstaw daną liczbę w postaci $\log_a b$, gdzie $a \in \mathbf{R}_+ - \{1\}$, $b \in \mathbf{R}_+$.

a) $1 + \log_2 5$ b) $\log 3 - 2$ c) $-1 - \log_{\frac{1}{5}} 2$

d) $\frac{1}{3} + 2\log_2 5$ e) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{4}} 27$ f) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log_{81} 16$

2.6. Oblicz:

a) $100^{1+\log 5}$ b) $8^{\log_2 5-\frac{1}{3}}$ c) $4^{-1+\log_2 3}$

d) $16^{\log_2 \sqrt{3}+0,25}$ e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 0,25+1}$ f) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 5-\frac{1}{2}}$

2.7. Oblicz:

a) $\frac{1}{2}\log_3 4-3\log_3 2+\log_3 36$ b) $3\log_{0,4} 2-\log_{0,4} 3\cdot\log_3 125$

c) $\frac{1}{2}\log_5 4\cdot\log_2 30-\log_5 6$ d) $\log_4 9\cdot\log_3 128+2\log_5 \sqrt{3}\cdot\log_3 25$

e) $\left(\log_5 9+\frac{1}{2\log_9 5}\right)\cdot\log_{27} 25$ f) $\frac{-\log_{0,6} 225}{2}\cdot\left(\frac{1}{\log_5 15}-\frac{1}{\log_3 15}\right)$

2.8. Rozwiąż równania z niewiadomą x.

a) $\log_3 \frac{1}{27}-x\log_{\sqrt{2}} 4=(x+1)\cdot\log 100$

b) $\log_5 625^x-(3x+2)\cdot\log_2 0,5=\log_3 48-2\log_3 4$

c) $(x+2)\cdot\left(\log_3 \frac{3}{7}+\log_3 21\right)=\frac{1}{2}\cdot\log_2 4^{x-1}$

d) $2\log_3\left(\sqrt{3}\right)^{2x-1}-x\log_{\frac{1}{2}} 8=3\log_{\sqrt{5}} 0,2$

D **2.9.** Wykaż, że dana liczba jest naturalna.

a) $\log_{\frac{2}{5}} 4+\log_{\frac{2}{5}} 2+\log_{\frac{2}{5}} \frac{1}{125}$ b) $0,4\cdot 5^{\log_5 2}+\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[5]{16}$

c) $\frac{1}{\log_2 6}+\frac{1}{\log_3 6}$ d) $\sqrt{10^{2+0,5\log 16}}$

e) $9\cdot\log_{125} 3\cdot\log_{\sqrt[3]{6}} 36\cdot\log_9 5$ f) $\log \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\log \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\log \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$

D **2.10.** Wykaż, że wartość danego wyrażenia jest liczbą całkowitą.

a) $\log_5 \log_5 \sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{5}}}-\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}$ b) $3^{\log_9 36}\cdot 10^{1-\log 2}+\log_{\frac{1}{2}} 5\cdot\log_5 512$

c) $(3-\log_2 5)\cdot\log_{1,6} \frac{1}{64}$ d) $\log^2_{\frac{1}{3}} 18+\log^2_{\frac{1}{3}} 2-\left(\log_{\frac{1}{3}} 2-2\right)\cdot\log_{\frac{1}{3}} 4$

2.11. Skróć ułamki.

a) $\frac{\log^2 5-\log^2 2}{\log 2,5}$ b) $\frac{\log_3^2 6-\log_3^2 2}{1+2\log_3 2}$

c) $\frac{\log_5^2 2+\log_5^2 3+\log_5 4\cdot\log_5 3}{\log_5 6}$ d) $\frac{\log_2^3 5-\log_2^3 3}{\log_2^2 5+\log_2^2 3+\log_2 5\cdot\log_2 3}$

e) $\frac{1+\log_3^3 6}{\log_3 0,5+\log_3^2 6}$ f) $\frac{\log^3_{\frac{1}{2}} 5-27}{\log_{0,5} 40}$

D **2.12.** Wykaż, że liczba $\log_{\frac{4}{9}}(\log_3 8)-\log_{\frac{4}{9}}(\log_3 4)$ należy do przedziału $(-1, 0)$.

D **2.13.** Wykaż, że liczba $81^{\frac{\log_5 4}{\log_5 16}}$ jest liczbą całkowitą nieparzystą.

D **2.14.** Wykaż, że liczba $\left(\log_2 \sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}+\log_2 \sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}\right)\cdot\log_{216} 4$ jest wymierna.

D **2.15.** Wykaż, że jeśli $\log_3 7=m$, to $\log_7 5\frac{4}{9}=\frac{2m-2}{m}$.

D **2.16.** Wykaż, że jeśli $\log_3 2=k$, to $\log_6 16=\frac{4k}{k+1}$.

D **2.17.** Wykaż, że jeśli $\log_5 2=a$ oraz $\log_5 7=b$, to $\log_{125} 28=\frac{2a+b}{3}$.

D **2.18.** Wykaż, że jeśli $\log_6 2=p$ oraz $\log_6 5=r$, to $\log_{36} 0,8=\frac{2p-r}{2}$.

Funkcja logarytmiczna – powtórzenie i uzupełnienie wiadomości

2.19. Dany jest wzór funkcji f. Naszkicuj wykres tej funkcji.

a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$

2.20. Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$, gdzie $x \in (0, +\infty)$. Następnie:

a) odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów wartości funkcji g są większe od -1,

b) sprawdź, czy do wykresu funkcji g należy punkt $A\left(\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right),0\right)$.

2.21. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_3 x$, gdzie $x > 0$. Następnie:

a) oblicz wartość funkcji f dla argumentu $\sqrt[6]{9\sqrt{9}}$,

b) oblicz argument, dla którego wartość funkcji f wynosi $\frac{-1}{2}$.

2.22. Do wykresu funkcji logarytmicznej $f(x)=\log_a x$, gdzie $a \in R_+ - \{1\}$ oraz $x \in R_+$ należy punkt $(4, -1)$. Wyznacz a. Następnie oblicz:

a) argument, dla którego wartość funkcji f jest równa $2\frac{1}{2}$,

b) wartość wyrażenia $f\left(\frac{1}{64}\right)\cdot\left[2f(1)-\frac{1}{3}f(8)\right]$.

2.23. Do wykresu funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \in R_+ - \{1\}$ oraz $x \in R_+$ należy punkt $P(8, 3)$. Oblicz a. Następnie odczytaj z wykresu tej funkcji:

a) zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe od 1,

b) zbiór argumentów, dla których $2 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

2.24. Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby x, y, z, t.

a) $x=\frac{1}{\log_8 3}-\log_3 5$, $y=\log_3\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 0,25}$, $z=\frac{\log_2 18}{\log_2 3}$, $t=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-1}$

b) $x=\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$, $y=\log_{\frac{1}{2}} 7\cdot\log_7 9$, $z=\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 125$, $t=\log_{\frac{1}{2}} 0,125$

2.25. Dany logarytm należy do przedziału $(k, k + 1)$, gdzie $k \in Z$. Podaj k.

a) $\log_3 5$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ c) $\log_{15} 7$ d) $\log_{\frac{1}{3}} 4$

e) $\log_6 21$ f) $\log_{\frac{1}{8}} 5$ g) $\log_7 50$ h) $\log_{\frac{1}{3}} 19$

2.26. Określ, czy podana liczba jest dodatnia, ujemna czy równa zero.

a) $\dfrac{\log_2 7}{\log_{\frac{1}{2}} 3+\log_{\frac{2}{3}} 8}$ b) $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 3+\log_5 5}{\log_{\frac{1}{2}} 15}$

c) $\dfrac{\log_5\sqrt{2}-\log_5 6}{\log_{\frac{1}{3}} 11-\log_{\frac{1}{3}} 17}$ d) $\dfrac{\log_2\sqrt{3}+\log_{0,8}\frac{\sqrt{2}}{2}}{\log_8\sqrt{11}-\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{5}}$

2.27. Rozwiąż nierówności.

a) $x\cdot\log_3\frac{1}{9}<\log_2 8$ b) $x\cdot\log_{0,5} 5\geqslant\log_{0,5} 25$

c) $x\cdot(\log_2 3 - \log_2 9)\leqslant 1$ d) $x\cdot\log_3 0,1>(1-x)\cdot\log_3 100$

2.28. Porównaj liczby x i y.

a) $x=5^{\log_3 8}$, $y=2^{\log_3 16}$ b) $x=5^{\log_2 6}$, $y=7^{\log_2 5}$

c) $x=3^{\log_7 0,2}$, $y=5^{\log_7 0,04}$ d) $x=4^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$, $y=3^{\log_{\frac{1}{6}} 5}$

2.29. Do wykresu funkcji $g(x) = \log x - b$, gdzie $x > 0$, należy punkt $A\left(\frac{1}{10},1\right)$.

a) Oblicz b.

D b) Wykaż, że $g\left(\frac{1}{4}\right)-g\left(\frac{5}{4}\right)+\log 5=0$.

D **2.30.** Do wykresu funkcji $f(x)=r\log_{\frac{1}{2}} x+m$, gdzie $x > 0$, należą punkty $A\left(\frac{1}{4},7\right)$, $B(8, -3)$. Wykaż, że $r + m$ jest liczbą pierwszą.

2.31. Miejscem zerowym funkcji $h(x) = k \cdot \log_3 x + p$, gdzie $x > 0$, jest liczba 9. Do wykresu funkcji h należy punkt $A(1, 2)$.

a) Wyznacz liczby k i p.

b) Oblicz wartość funkcji h dla argumentu $3\sqrt{3}$.

2.32. Wykres funkcji $f(x)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$ przecina wykres funkcji $g(x) = \log_a x$ w punkcie o rzędnej 2.

a) Oblicz a.

b) Naszkicuj wykresy funkcji f i g we wspólnym układzie współrzędnych i podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > g(x)$.

2.33. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \log(2x + 10)$ b) $f(x) = \log_{(4-x)} 10$ c) $f(x) = \log_x (9 - x^2)$

Przekształcenia wykresów funkcji logarytmicznych

2.34. Naszkicuj wykresy funkcji.

a) $f(x) = \log_3 9x$ b) $f(x)=\log_2 \frac{8}{x}$ c) $f(x)=\log_{0,5}(-2x)$

d) $f(x) = \log_{0,25}(x + 2)$ e) $f(x) = \log_4 (1 - x)$ f) $f(x)=\log_2 (4x-12)$

2.35. Dana jest funkcja $f(x) = \log_2 (x - 5)$, gdzie $x > 5$.

a) Naszkicuj wykres tej funkcji.

b) Podaj argument, dla którego wartość funkcji f jest równa 2.

c) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $5\frac{1}{8}$.

2.36. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+3)-1$, gdzie $x \in (-3, +\infty)$.

a) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY.

b) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 6.

c) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od -3.

2.37. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\log_2 (x + 1)$, gdzie $x \in (-1, +\infty)$.

a) Sprawdź rachunkowo, czy liczba 0 jest miejscem zerowym funkcji f.

b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie?

c) Dla jakich argumentów wartości funkcji f są mniejsze od -2?

2.38. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -2 - \log_{0,5}(x - 1)$, gdzie $x \in (1, +\infty)$. Na podstawie tego wykresu podaj zbiór rozwiązań:

a) równania $g(x) = 1$ b) nierówności $-2 \leqslant g(x) < 1$.

2.39. Naszkicuj wykres funkcji $h(x) = \log_3(-x) - 2$ i podaj jej dziedzinę.

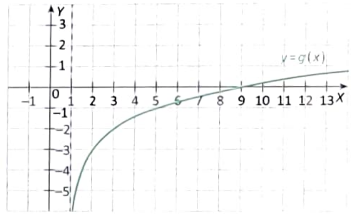
a) Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $h(x) \leqslant -1$.

b) Sprawdź rachunkowo, czy do wykresu funkcji h należy punkt $A\left(-5^{\log_5 9}, 0\right)$.

2.40. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = g(x)$, który otrzymano, przesuwając równolegle wykres funkcji $f(x) = \log_2 x$ o wektor $\vec{u} = [1, -3]$.

a) Napisz wzór funkcji g i podaj jej dziedzinę.

b) Rozwiąż graficznie równanie $g(x) = 4 - x$.



2.41. Wykres funkcji $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ przesunięto równolegle o wektor $\vec{v} = [0, -2]$. Następnie otrzymany wykres przekształcono przez symetrię osiową względem osi OX i otrzymano wykres funkcji $y = g(x)$.

a) Napisz wzór funkcji g i naszkicuj jej wykres.

b) Rozwiąż graficznie nierówność $g(x) \geqslant \frac{x+7}{3}$.

2.42. Funkcja h jest określona wzorem $h(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2x-x^2)-\log_{\frac{1}{2}}(2-x)$.

a) Wyznacz dziedzinę funkcji h i naszkicuj wykres tej funkcji.

b) Podaj zbiór wartości funkcji h.

2.43. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \log_3 (4 - x^2) - \log_3 (2 + x)$.

a) Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj wykres tej funkcji.

b) Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) > x + 2$.

2.44. Rozwiąż graficznie równania.

a) $\log_2 (x - 1) = 4 - x$ b) $\log_2 (1-x)=2-|x|$

c) $\log_2(-x)=\frac{2}{9}(x+1)^2$ d) $\log_3 x = \frac{3}{x}$

2.45. Rozwiąż graficznie nierówności.

a) $\log_2(x-2)-1 \geqslant 4x-x^2$

b) $1-\log_{\frac{1}{2}} x > \frac{4}{x}$

c) $2+\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > -|x-2|$

d) $\log_3(-x)-1 > \frac{-x-5}{4}$

Równania logarytmiczne

2.46. Rozwiąż równanie. Pamiętaj o określeniu dziedziny tego równania.

a) $\log_2(x-1)=5$

b) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5)=-2$

c) $\log_{2\sqrt{2}}(5-x)=4$

d) $\log_{27}\left(\frac{3-2x}{4}\right)=\frac{2}{3}$

e) $\log_4|x-7|=0{,}5$

f) $\log_{0{,}75}|x+2|=0$

2.47. Rozwiąż równanie. Pamiętaj o określeniu dziedziny tego równania.

a) $\log_2\frac{1}{x}=3$

b) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{2-x}=-2$

c) $\log_{125}\frac{5}{x+1}=\frac{2}{3}$

d) $\log_{16}\frac{5}{2-8x}=-0{,}75$

e) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+1)=-1$

f) $\log_2\frac{1}{x^2+3}=0$

2.48. Rozwiąż równanie. Pamiętaj o określeniu dziedziny tego równania.

a) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x+3)=-1$

b) $\log_2(x^2-1)=3$

c) $\log_{\sqrt{5}}(9-4x^2)=2$

d) $\log_{0{,}5}(x^2+4x+4)=-2$

e) $\log_{27}(x^2-4x+3)=\frac{1}{3}$

f) $\log_{2\sqrt{2}}(5+4x-x^2)=2$

2.49. Rozwiąż równanie. Pamiętaj o określeniu dziedziny tego równania.

a) $\log_9(|x-2|+1)=\frac{1}{2}$

b) $\log_{\frac{2}{5}}|x|=-2$

c) $\log_{81}(|x+3|-2)=0{,}75$

d) $\log_{216}(4-|5-x|)=\frac{1}{3}$

e) $\log_{\frac{1}{32}}(|-x-7|+2)=-\frac{1}{5}$

f) $\log_{\sqrt{3}}(3-|1-2x|)=2$

2.50. Rozwiąż równania.

a) $\log_x 27=3$

b) $\log_x 81=2$

c) $\log_{2x}16=-2$

d) $\log_{\frac{x}{5}}1=-1$

e) $\log_{x^2}36=1$

f) $\log_{(x-1)^2}25=2$

2.51. Rozwiąż równanie. Pamiętaj o określeniu dziedziny tego równania.

a) $\log_{2x-3}25=2$

b) $\log_{3-x}81=4$

c) $\log_{2x+1}27=3$

d) $\log_{2x}(4x-1)=2$

e) $\log_x(6x-9)=2$

f) $\log_{2-x}(2-x)=0$

2.52. Rozwiąż równania.

a) $\log_{2x+3}\frac{1}{3x}=-1$

b) $\log_{x+1}(3x^2+3x)=3$

c) $\log_{x-2}(x^2-4x+4)=1$

d) $\log_{x^2+1}(x^2+7)=2$

e) $\log_{5-x}\frac{1}{x+7}=-1$

f) $\log_{x^2-1}(3x^2-3)=2$

2.53. Rozwiąż równania.

a) $\log_4(\log_3 x)=0$

b) $\log_2(\log_4 x)=1$

c) $\log\left[3+2\log(1+x)\right]=0$

d) $\log_{\frac{1}{2}}\left[1-\log_3(x+4)\right]=-1$

e) $\log_{\sqrt{5}}\left[3+\log_4(\log_2 x+10)\right]=2$

f) $\log_{\frac{4}{25}}\left[3{,}5-3\log_{\frac{1}{8}}(\log_5 x+1)\right]=-\frac{1}{2}$

2.54. Rozwiąż równania.

a) $\log_{\frac{1}{2}}x=4\cdot\log_{\frac{1}{2}}x+6$

b) $\left[\log_2(x-1)\right]^3=125$

c) $\log_{\frac{1}{3}}x\cdot\left(2\log_{\frac{1}{3}}x-7\right)=4$

d) $4\log_9^2(x+5)-1=0$

e) $\frac{2\log_{\sqrt{2}}x+4}{\log_{\sqrt{2}}x}=\log_3 81$

f) $2\cdot\log_5^3(x+3)=\log_5(x+3)+1$

2.55. Rozwiąż równania.

a) $\log_3(x+2)=\log_3(2x+1)$

b) $\log_{\frac{1}{4}}(x-3)+\log_{\frac{1}{4}}x=-1$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{2}}(1-x)=1$

d) $\log_2 x+\log_2(x+2)=\log_2(8x)$

e) $\log_3(3x+1)-\log_3(1-x)=\log_3 x$

f) $\log\frac{1}{2}(x+10)=\log(21x-20)-\log(2x-1)$

Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym

2.56. W laboratorium wyhodowano pewną kulturę bakterii. Zauważono, że jeśli masa bakterii jest równa 5 g, to dalszy ich rozwój przez 30 dni opisuje funkcja $w(t) = 5 \cdot 2^{0{,}05t}$, $t \in \langle 0, 30 \rangle$, gdzie $w(t)$ oznacza masę (w gramach) tej kultury bakterii po t dniach od rozpoczęcia obserwacji.

a) Jaka będzie masa bakterii po 4 dniach obserwacji? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 g.

b) Po ilu dniach masa bakterii się podwoi?

c) Po jakim czasie masa bakterii osiągnie 6 g? Wynik podaj z dokładnością do jednej godziny.

d) Jaka będzie masa bakterii po 30 dniach? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 g.

2.57. Ciecz podgrzano do temperatury 100°C, a następnie umieszczono ją w lodówce, w której temperatura była równa 0°C. Wiadomo, że temperaturę T (w °C) tej cieczy po x minutach od włożenia do lodówki opisuje funkcja $T(x) = 100 \cdot 2^{-0{,}1x}$.

a) Jaka będzie temperatura cieczy po 10 minutach?

b) Jaka będzie temperatura po 30 minutach? Wynik podaj z dokładnością do 0,1°C.

c) Po jakim czasie temperatura będzie równa 25°C?

d) Po jakim czasie temperatura będzie równa 20°C? Wynik podaj z dokładnością do 1 s.

2.58. Pan Nowak założył w banku lokatę w wysokości 10 000 zł na procent składany z kwartalną kapitalizacją odsetek. Roczne oprocentowanie tej lokaty wynosi 8% i się nie zmienia.

a) Oblicz, ile zarobi pan Nowak na tej lokacie po 6 kwartałach.

b) Po ilu kwartałach zysk z lokaty byłby równy co najmniej 500 zł?

W obliczeniach uwzględnij 19-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

2.59. Pani Kowalska chce założyć w banku lokatę na 100 000 zł. Ma do wyboru dwie oferty.

I oferta – lokata na 6 kwartałów na procent składany, oprocentowanie w każdym kwartale 4%, kwartalna kapitalizacja odsetek;

II oferta – lokata na 4 kwartały na procent składany, oprocentowanie w każdym kwartale 6%, kwartalna kapitalizacja odsetek.

W obu ofertach trzeba uwzględnić 19-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

a) Która oferta jest korzystniejsza dla pani Kowalskiej i o ile złotych?

b) O ile kwartałów powinna być przedłużona korzystniejsza lokata, aby zysk pani Kowalskiej był równy co najmniej 30 000 zł?

2.60. W lutym 2022 r. na Morzu Bałtyckim, ok. 100 km od wybrzeża polskiego, miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 2,6 w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi, korzystając ze wzoru $R = \log \frac{A}{A_0}$, gdzie R jest siłą trzęsienia ziemi mierzoną w stopniach w skali Richtera, A – amplitudą trzęsienia ziemi mierzoną w centymetrach, A_0 – amplitudą wzorcową o wartości 10^{-4} cm.

2.61. W czerwcu 1996 r. w okolicach Augustowa miało miejsce trzęsienie ziemi. Amplituda tego trzęsienia była równa ok. 2 cm. Oblicz siłę tego trzęsienia ziemi w skali Richtera, korzystając ze wzoru z poprzedniego zadania.

2.62. Jedną z największych znanych liczb pierwszych jest liczba $2^{82589933} - 1$. Oblicz, ile cyfr w zapisie dziesiętnym ma ta liczba.

Test sprawdzający do rozdziału 2.

1. Liczba $\left(2 - \log_{\frac{1}{3}} 27\right)^{-1}$ jest równa:

A. –1 B. 0,2 C. 1 D. 5

2. Liczba $\log_4\left[\left(\sqrt{2}\right)^6 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^9 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{13}\right]$ jest podzielna przez:

A. 7 B. 4 C. 5 D. 6

3. Jeśli $x = \log 12 + (\log_4 10)^{-1}$, to 10^x jest równe:

A. 48 B. 32 C. 24 D. 16

4. Liczba $(3 - \log_2 5) \cdot \log_{\frac{8}{5}} \frac{1}{16}$ jest:

A. liczbą pierwszą B. liczbą całkowitą ujemną

C. liczbą niewymierną D. liczbą nieparzystą

5. Jeśli $\log_3 4 = a$, to liczba $\log_3 \sqrt[3]{432}$ jest równa:

A. $\frac{2}{3}a+3$ B. $\frac{a+3}{3}$ C. $\frac{2}{3}a+1$ D. $\frac{2a+1}{3}$

6. Niech $x = 8^{\log_2 3}$, $y = \log_3 5$, $z = \log_{\frac{1}{2}} 7$. Wówczas:

A. $x < y < z$ B. $z < x < y$ C. $y < z < x$ D. $z < y < x$

7. Do wykresu funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ należy punkt $P(4, -2)$. Wówczas:

A. $f(8) > 0$ B. $f(1) = 1$ C. $f(\sqrt{2}) = -0{,}5$ D. $f\left(\frac{1}{7}\right) = -2$

8. Przekształcając wykres funkcji $f(x) = \log x$ przez symetrię osiową względem prostej $y = x$ otrzymamy wykres funkcji:

A. $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ B. $y = \log(-x)$ C. $y = -\log x$ D. $y = 10^x$

9. Funkcja $g(x) = \log_{4-0{,}5m}(x+7)$ jest malejąca tylko wtedy, gdy:

A. $m \in (6, 8)$ B. $m < 6$ C. $m > 8$ D. $m \in (-7, 0)$

10. Funkcje $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x - 2$ oraz $g(x) = 4^{x-m} - 8$ mają wspólne miejsce zerowe. Wówczas m jest rozwiązaniem równania:

A. $m^2 = 1$ B. $|m+5| = 1$ C. $\left|m - 1\frac{1}{2}\right| = 0$ D. $(m+3)^2 = 0$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

11. Oblicz:

a) $\dfrac{2-\log_2 3+\log_2 12}{\frac{1}{3}\log_4 8+0{,}5}$ b) $\dfrac{\log_5 1024}{\log_5 2}\cdot 25^{\log_5 \frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$

12. Uporządkuj liczby a, b, c, d w kolejności od najmniejszej do największej.

$a = 2\log_{\frac{2}{5}}(\sqrt{5}-1)$, $b = \log_{\frac{2}{5}} 0{,}8 + \log_{\frac{2}{5}} 0{,}2$, $c = \log_{\frac{2}{5}} 4 \cdot \log_4 100$, $d = \log_{\frac{2}{5}} 3 - \log_{\frac{2}{5}} 4$

13. Do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x + b$, $x \in \mathbf{R}_+$, należą punkty $M(1, -1)$ i $N(8, -4)$.

a) Oblicz a i b.
b) Naszkicuj wykres funkcji f.
c) Podaj zbiór rozwiązań równania $f(x) = -3$.
d) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > -1$.

14. Wykresy funkcji $f(x) = \log_2(x+a)$ i $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+b} - 1$ przecinają oś OY w punkcie o rzędnej 2.

a) Wyznacz liczby a, b. Podaj dziedzinę funkcji f oraz dziedzinę funkcji g.
b) Oblicz miejsca zerowe obu funkcji.
c) Naszkicuj wykresy funkcji f i g we wspólnym układzie współrzędnych.
d) Odczytaj zbiór argumentów, dla których obie funkcje przyjmują jednocześnie wartości dodatnie.

15. W laboratorium podgrzano pojemnik z płynem, a następnie pozwolono, by płyn wystygł. Temperaturę płynu T (°C) opisuje wzór funkcji $T(t) = 90 \cdot 1{,}5^{-0{,}2t}$, gdzie t oznacza czas stygnięcia w minutach.

a) Jaką temperaturę miał płyn, gdy rozpoczynał się proces stygnięcia?
b) Jaka jest temperatura płynu po piątej minucie?
c) Ze wzoru $T = 90 \cdot 1{,}5^{-0{,}2t}$ wyznacz t. Oblicz, ile minut potrzeba, aby płyn osiągnął temperaturę 40°C.

16. Rozwiąż równanie, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $3^{x-2} - 3 = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ b) $\log_3(-x) + 1 = 4^{x+1}$

17. Rozwiąż nierówność, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \leqslant \log_3(x-6) - 2$ b) $3 - \log_{\frac{1}{4}}(x+2) \leqslant 3^{-x}$

18. Rozwiąż równania.

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x) = -2$ b) $\log_{x-3} 81 = 2$

c) $\log_{x^2}(4x-4) = 1$ d) $\log_{\frac{1}{2}}[\log_3(2-x)] = -1$

e) $\log_3 x \cdot (\log_3 x - 3) + 2 = 0$ f) $\dfrac{3}{\log(x-2)-1} = \log(x-2)+1$

D **19.** Wykaż, że jeśli $x = 2\log_3 10$ oraz $y = \log 2$, to $3^x - 10^y = 98$.

D **20.** Wykaż, że jeśli $x = \dfrac{1}{3\log_5 2}$ i $y = \dfrac{2}{\log_3 7}$, to liczba $8^x + 7^y$ jest podzielna przez 7.

D **21.** Wykaż, że liczby $\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_{27} 8 \cdot \log_8 9\right)$ i $1 + \log_{\sqrt{5}}\left(3 - 2\sqrt{2}\right) + \log_{\sqrt{5}}\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$ są równe.

D **22.** Wykaż, że liczba spełniająca równanie $\log_{0,64} x = 0,5$ jest o 50% mniejsza od liczby $\log_{4\sqrt{2}} 16$.

D **23.** Wykaż, że jeśli $a > 2$ oraz $9^{\log_3(a-2)} = 16$, to $3\log_{216} a = 1$.

D **24.** Wykaż, że jeśli $\left(\sqrt{3}\right)^a \cdot 3^b = 243$ i $\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^a}{2^b} = 8^{-\frac{1}{3}}$, to $2 + \log_{\frac{1}{5}}\left(a^2 + b^2\right) = 0$.

D **25.** Wiadomo, że liczby p i q są dodatnie, $q < 6$ oraz $p + 2q = 4$. Wykaż, że $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{8+p}{6-q} = 2$.

26. Liczby -3, $2\log_2(x-3)$, $3\log_2(x-3) + 4$, są w podanej kolejności trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n).

a) Wyznacz x.

b) Podaj ogólny wyraz ciągu (a_n).

c) Oblicz sumę $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + \ldots + a_{15}$.

27. Liczby 1, $\log_2(x+2)$, $\log_2(x+2) + 2$, są w podanej kolejności trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n).

a) Wyznacz x.

b) Podaj wyraz ogólny ciągu (b_n) w przypadku, gdy ten ciąg nie jest monotoniczny.

c) Oblicz dziesiąty wyraz ciągu (b_n) w przypadku, gdy ten ciąg jest rosnący.

3. Elementy statystyki

Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej

3.1. Odpowiedz na następujące pytania.

a) Czym zajmuje się statystyka opisowa?

b) W jaki sposób przeprowadza się obserwację statystyczną?

c) Co nazywamy próbą?

d) Jakie cechy statystyczne nazywamy cechami mierzalnymi, a jakie cechami niemierzalnymi? Podaj po trzy przykłady cech mierzalnych oraz cech niemierzalnych.

3.2. W pewnym mieście komendant policji przeanalizował liczbę wypadków drogowych z ostatniego roku, spowodowanych przez kierowców samochodów osobowych na terenie tego miasta. Badaną cechą była przyczyna wypadku. Wyniki przedstawia tabela obok.

Przedstaw zebrane dane w postaci diagramu kolumnowego i diagramu częstości względnych.

Przyczyna wypadku	Liczebność
Przejazd na czerwonym świetle	81
Jazda z nadmierną prędkością	144
Wymuszenie pierwszeństwa	90
Jazda pod wpływem alkoholu	135

3.3. Wychowawca klasy 4a przeanalizował liczbę spóźnień poszczególnych uczniów tej klasy na pierwsze godziny lekcyjne w listopadzie. Wyniki badań są przedstawione w tabeli liczebności.

a) Ile osób liczy klasa 4a?

b) Sporządź diagram słupkowy oraz diagram kołowy procentowy liczby spóźnień.

Liczba spóźnień przypadająca na jednego ucznia	Liczebność
0	11
1	3
2	2
3	4
4	5

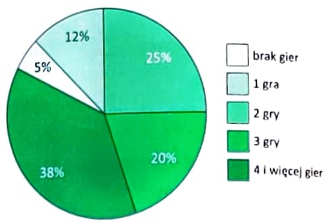
3.4. Wśród 20 uczniów klasy 4b przeprowadzono ankietę, dotyczącą dziennej liczby godzin, przeznaczonych na odrabianie lekcji. Zebrano następujące wyniki:

0,5 1 3 3 2,5 0,5 1,5 2 3 4 0,5 1 1 1 1,5 2,5 4 3 2 1

a) Przedstaw zebrane dane w tabeli liczebności oraz na diagramie kolumnowym.

b) Oblicz, jaki procent badanych uczniów przeznacza co najwyżej 2 godziny na odrabianie prac domowych.

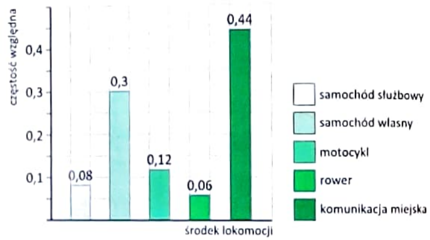
3.5. Firma badająca rynek gier przeprowadziła sondę na próbie 200 losowo wybranych uczniów, w której zapytano o liczbę posiadanych gier komputerowych. Otrzymane wyniki przedstawia diagram obok.



a) Przedstaw zebrane dane na diagramie słupkowym.

b) Ilu spośród badanych uczniów ma co najmniej 3 gry komputerowe?

3.6. W firmie zatrudniającej 50 osób zbadano, jakimi środkami lokomocji pracownicy dojeżdżają do pracy. Wyniki przedstawia diagram częstości względnych.

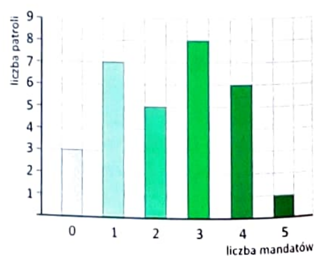


a) Oblicz, jaki procent pracowników firmy dostaje się do pracy innymi środkami transportu, niż komunikacja miejska.

b) Ile osób przyjeżdża do pracy samochodem służbowym, a ile na motocyklu lub na rowerze?

c) Sporządź diagram kołowy zebranych wyników.

3.7. Diagram obok przedstawia liczbę wystawionych mandatów w wybranym dniu przez patrole policji drogowej w pewnej gminie.



a) Jaką liczbę patroli poddano temu badaniu?

b) Ilu kierowców zostało ukaranych mandatami przez badane patrole?

c) Ile mandatów przypada średnio na jeden patrol policji?

d) Przedstaw zebrane dane w tabeli częstości względnych.

Średnia z próby

3.8. Średnia arytmetyczna liczb 2, 3, 3, 5, 4, 2, x, 6, 9, 1 wynosi 4. Oblicz x.

3.9. Średnia arytmetyczna wieku drużyny piłkarskiej jest równa 24 lata. Gdyby uwzględnić wiek trenera, to średnia arytmetyczna wieku wszystkich dwunastu osób wyniosłaby 26 lat. Ile lat ma trener?

3.10. Ankieter przeprowadził sondę telefoniczną na próbie 30 osób. Badaną cechą była dzienna liczba godzin przeznaczana na oglądanie telewizji. Otrzymał następujące wyniki.

1 0,5 2,5 1 3,5 4 6 2 1,5 3 0,5 2 1 1 0

2 0,5 3 4 4,5 5 0,5 2 3 1 4 2 3 1 4

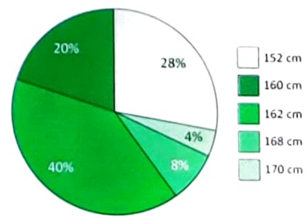
a) Przedstaw zebrane dane na diagramie kolumnowym.

b) Jaka jest średnia czasu oglądania telewizji w ciągu jednego dnia w badanej próbie?

c) Jaki procent badanych osób przeznacza więcej czasu na oglądanie telewizji, niż wynosi średnia? Wynik zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

d) Ile spośród badanych osób ogląda codziennie telewizję w czasie dłuższym, niż podwojony średni czas?

3.11. Na diagramie kołowym procentowym przedstawiono wyniki pomiaru wzrostu trzynastoletnich dziewczynek w pewnej szkole podstawowej.



a) Oblicz średni wzrost trzynastoletniej dziewczynki.

b) Przedstaw zebrane dane na diagramie częstości względnych.

c) Wiedząc dodatkowo, że zmierzono wzrost 75 dziewczynek, sporządź tabelę liczebności.

d) Ile dziewczynek z badanej grupy wiekowej ma wzrost powyżej średniej?

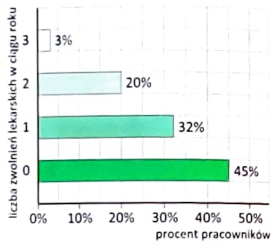
3.12. W bibliotece szkolnej zbadano, ile książek wypożyczyli uczniowie klas drugich pewnego technikum w ciągu pierwszego semestru. Uzyskane wyniki przedstawia poniższa tabela.

Liczba wypożyczonych książek	0	1	2	3	4	5	7	8
Liczba uczniów	13	31	17	32	12	9	2	4

a) Oblicz średnią liczbę wypożyczonych książek w danym semestrze przez ucznia drugiej klasy technikum.

b) Jaki procent uczniów klas drugich wypożycza więcej książek, niż wynosi ta średnia?

3.13. Zbadano liczbę zwolnień lekarskich pracowników pewnej firmy przypadających na ostatni rok. Wyniki przedstawia diagram obok.



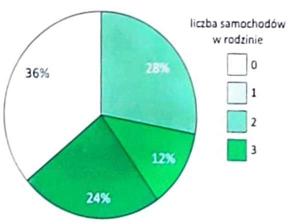
a) Jaka była średnia liczba zwolnień przypadająca na jednego pracownika tej firmy w ostatnim roku?

b) Wiadomo, że w badanym okresie firma zatrudniała 200 osób. Oblicz, ile osób było na zwolnieniu lekarskim co najmniej dwa razy.

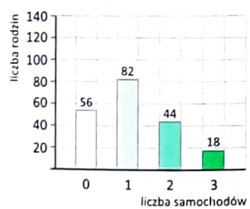
c) O ile procent więcej pracowników korzystało ze zwolnienia lekarskiego niż tych, którzy nie byli na zwolnieniach lekarskich ani razu?

3.14. W miastach A i B badano niezależnie liczbę samochodów w rodzinie na równolicznych próbach. Wyniki przedstawiają poniższe diagramy.

miasto A



miasto B



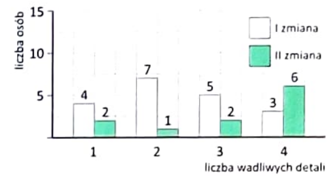
a) Ile badanych rodzin z miasta A nie ma samochodu?

b) Jaki procent badanych rodzin z miasta B ma co najmniej dwa samochody?

c) Oblicz średnią liczbę samochodów w rodzinie w każdym z miast A i B.

d) Jaka jest średnia liczba samochodów w rodzinie dla obu tych miast?

3.15. W zakładzie produkcyjnym robotnicy wytwarzający jednakowe detale pracują na dwie zmiany: 30 osób na pierwszej zmianie i 20 osób na drugiej zmianie. Zbadano liczbę wadliwych detali, wykonanych przez poszczególnych pracowników w określonym czasie. Poniższy diagram przedstawia liczby robotników każdej zmiany, którzy podczas produkcji wykonali jeden, dwa, trzy albo cztery wadliwe detale. Pozostali robotnicy wyprodukowali detale bez wad.



a) Ilu robotników zakładu wyprodukowało tylko niewadliwe detale? Jaki to procent wszystkich pracowników?

b) Która zmiana wykonuje średnio mniej wadliwych detali, przypadających na jednego robotnika?

c) Oblicz średnią liczbę wadliwych detali wyprodukowanych przez jednego pracownika zakładu.

3.16. W sklepie znajduje się 50 par spodni, wśród których jest 12 par spodni o długości 1,2 m każda. Pozostałe spodnie mają długość 1,24 m oraz 1,3 m. Średnia długość wszystkich spodni w tym sklepie jest równa 1,264 m. Oblicz stosunek liczby spodni o długości 1,24 m do liczby spodni o długości 1,3 m.

3.17. W trzech klasach czwartych pewnego liceum przeprowadzono próbną maturę z matematyki w zakresie podstawowym. Średnia liczba zdobytych punktów w klasie IVa wynosiła 25, w klasie IVb wynosiła 30, a w IVc była równa 32. Sprawdzian pisały 32 osoby z klasy IVa oraz 25 osób z klasy IVb. Oblicz, ile osób z klasy IVc uczestniczyło w tym sprawdzianie, jeśli średnia zdobytych punktów, przypadająca na jednego ucznia tych trzech klas, była równa 28,575.

3.18. W pewnej uczelni o przyjęciu na pierwszy rok studiów decyduje średnia ważona punktów, uzyskanych na maturze w zakresie rozszerzonym z matematyki, geografii oraz wybranego języka obcego. Wagi punktów uzyskanych z tych przedmiotów są następujące: z matematyki 0,65, z geografii 0,2, a z języka obcego 0,15. Eliza i Jacek uzyskali na maturze wyniki przedstawione w tabeli.

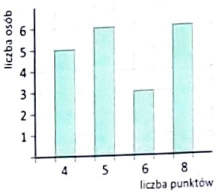
	Matematyka	Geografia	Język obcy
Eliza	38 pkt	24 pkt	48 pkt
Jacek	26 pkt	40 pkt	50 pkt

Która z tych osób ma większe szanse dostania się do tej uczelni na studia?

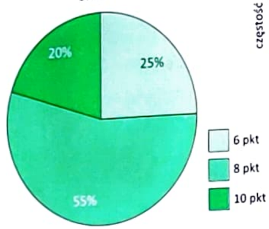
3.19. Firma A sprzedała swoje akcje w trzech turach w ilościach 2 : 3 : 5, kolejno w cenie 40 zł, 60 zł i 100 zł za jedną akcję. Firma B sprzedała 30% swoich akcji w cenie 50 zł za jedną akcję, 22,5% akcji – po 70 zł za akcję, a pozostałe akcje – po 80 zł za sztukę. Porównaj średnie ceny akcji obu firm.

3.20. Właściciel kawiarni, chcąc wprowadzić do karty nową kawę, przeprowadził ankietę oceny tej kawy na próbie 20 losowo wybranych klientów. Klienci oceniali kawę w trzech kategoriach: barwa, smak i zapach – przyznając w każdej z tych kategorii liczbę punktów od 1 do 10. Wyniki tej ankiety są przedstawione na diagramach poniżej.

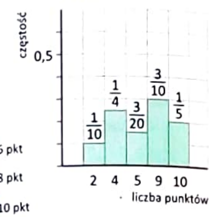
barwa



smak



zapach



Następnie właściciel chce wyznaczyć średnie arytmetyczne $\overline{x}_B$, $\overline{x}_S$, $\overline{x}_Z$ punktów uzyskanych odpowiednio w kategoriach barwa, smak, zapach i na koniec obliczyć średnią ważoną tych liczb, gdzie $\overline{x}_B$ ma wagę 2,5, $\overline{x}_S$ – wagę 4, a $\overline{x}_Z$ – wagę 3,5. Właściciel wprowadzi tę kawę do stałej sprzedaży tylko wtedy, gdy średnia ważona będzie większa od 70. Czy nowa kawa będzie w stałej ofercie tej kawiarni?

Mediana z próby i moda z próby. Skala centylowa

3.21. Wyznacz modę (dominantę) oraz medianę zestawu danych statystycznych, przedstawionych w postaci zestawu liczb.

a) 2 2 2 2 4 5 5 5 6 7

b) 1 2 4 4 4 5 8 8 8

c) 3 1 3 5 1 2 3 3 5 5 4 2 1 3 2

d) 0 1 2 3 0 1 2 3 0 1 2 3

3.22. Wyznacz modę oraz medianę zestawu danych statystycznych, przedstawionych w postaci:

a) tabeli liczebności

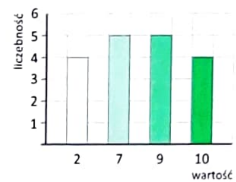
Wartość	3	12	5	9
Liczebność	7	2	4	6

b) tabeli częstości

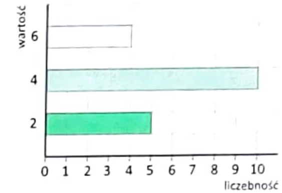
Wartość	3	4	5	8	9
Częstość względna	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3.23. Wyznacz modę oraz medianę zestawu danych statystycznych, przedstawionych w postaci:

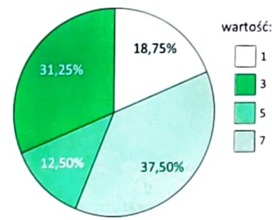
a) diagramu kolumnowego



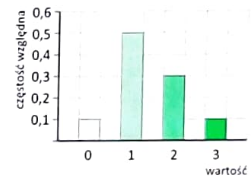
b) diagramu słupkowego



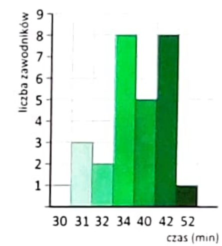
c) diagramu kołowego procentowego



d) diagramu częstości względnych



3.24. W biegu przełajowym zmierzono czas 28 osobom, które pierwsze przekroczyły linię mety. Ich wyniki przedstawia diagram kolumnowy na rysunku obok. Wyznacz modę, medianę oraz średnią arytmetyczną czasu uzyskanego przez tych zawodników.



3.25. Tabela obok przedstawia oceny uczniów klasy czwartej, uzyskane z pracy klasowej z matematyki.

Ocena	1	2	3	4	5
Liczebność	4	8	12	6	2

a) Wyznacz modę i medianę tych ocen.

b) Oblicz średnią ocen z pracy klasowej.

c) Jaki procent uczniów dostało oceny pozytywne?

d) Sporządź diagram kołowy procentowy ocen.

3.26. Pan Kowalski dojeżdża do pracy autobusem i przychodzi na przystanek o stałej porze. Postanowił zapisać czas oczekiwania na autobus z dokładnością do jednej minuty przez kolejne 22 dni robocze. Otrzymał następujące dane.

10 5 10 5 10 7 10 5 2 8 5 3 10 4 3 5 7 10 5 8 10 5

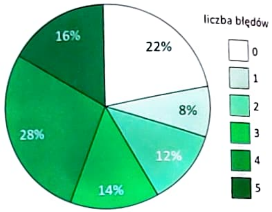
a) Sporządź diagram częstości względnych otrzymanych wyników.

b) Wyznacz modę i medianę czasu oczekiwania.

c) Oblicz średni czas oczekiwania na autobus.

d) Oblicz, jaki procent stanowiły dni, w których czas oczekiwania na autobus był większy od średniej.

3.27. Egzamin testowy z przepisów ruchu drogowego zdawało jednocześnie 50 osób. Liczbę popełnionych błędów w tej próbie przedstawia diagram kołowy procentowy.



a) Aby zdać egzamin, można było popełnić co najwyżej dwa błędy. Ile osób z tej próby zdało egzamin?

b) Oblicz średnią liczbę popełnionych błędów.

c) Jaki procent zdających popełniło więcej błędów, niż wynosi średnia?

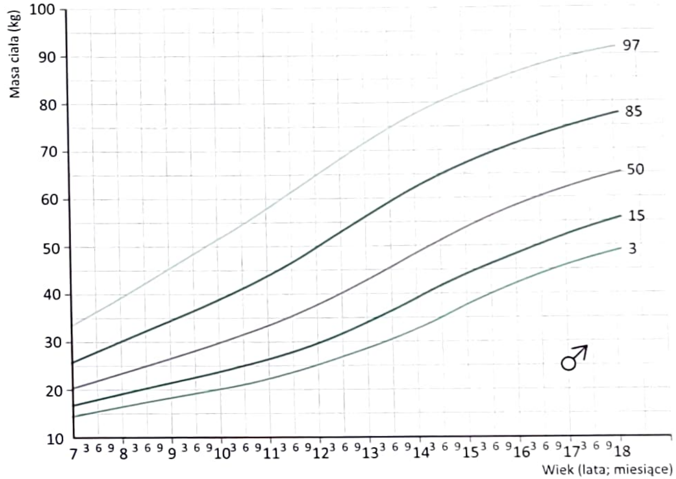
d) Wyznacz medianę popełnionych błędów.

3.28. Wyznacz naturalne liczby a i b, $a > b$, dla których średnia arytmetyczna zestawu danych 3, 2, 4, 1, 3, 1, 4, 5, a, b jest równa 2,8, a jedyną modą tego zestawu jest liczba 3.

3.29. Wyznacz dwie naturalne liczby x i y, $x < y$, dla których zestaw danych: 6, 5, 2, 7, 4, 3, x, y ma tylko jedną modę, a mediana tego zestawu danych jest równa 4.

3.30. Mediana zestawu danych 2, 12, 7, 10, 3, 18, 2, 15, 20, k jest równa 9. Oblicz średnią arytmetyczną tych danych.

3.31. Rysunek poniżej przedstawia siatkę centylową masy ciała chłopców w zależności od ich wieku.



a) Tomek ma 13 lat i 9 miesięcy i waży 60 kg. Któremu centylowi odpowiada waga tego chłopca?

b) Ile procent chłopców w wieku 16 lat i 6 miesięcy ma wagę nie większą niż 50 kg?

3.32. W 2018 roku w pewnej gminie do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym przystąpiło 400 uczniów. Za rozwiązania zadań wystawiano tylko całkowite liczby punktów, maksymalnie można było uzyskać 50 punktów. Poniższa tabela ilustruje wyniki procentowe tego egzaminu, wraz z odpowiadającymi im wartościami centylowymi.

Wyniki egzaminu maturalnego z matematyki – poziom rozszerzony					
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	4	34	53	68	84
2	11	36	55	70	85
4	17	38	57	72	86
6	22	40	59	74	87
8	26	42	61	76	88
10	30	44	63	78	89
12	33	46	65	80	90
14	36	48	67	82	91
16	39	50	69	84	92
18	41	52	70	86	93
20	43	54	72	88	94
22	44	56	76	90	95
24	45	58	77	92	96
26	46	60	79	94	97
28	47	62	80	96	98
30	49	64	81	98	99
32	51	66	83	100	100

a) Z tego egzaminu Antek uzyskał wynik procentowy 56%. Ile to punktów? Ile procent osób przystępujących do tego egzaminu miało wynik co najwyżej taki, jak wynik Antka?
b) Ilu maturzystów uzyskało wynik słabszy od wyniku Antka?
c) Ilu maturzystów uzyskało wynik procentowy z przedziału $\langle 52\%, 58\%\rangle$?
d) Ile osób uzyskało co najmniej 40 punktów? Jaki to procent zdających?
e) Podaj modę i medianę uzyskanych punktów z egzaminu.
f) Oblicz średnią liczbę uzyskanych punktów.

Wariancja i odchylenie standardowe

3.33. Oblicz na dwa sposoby wariancję zestawu danych.

a) 1 1 2 2 3 3 3 4
b) $1\frac{2}{5}\quad 1\frac{4}{5}\quad 1\frac{9}{10}\quad 2\frac{1}{5}\quad 2\frac{1}{2}$
c) 3 5 7 20 84
d) −3 −3 −3 −1 6 8 12 15 20 30

3.34. Wyznacz odchylenie standardowe zestawu danych, z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

a) −5 −4 2 7 10 18 21 24
b) 1,1 1,3 1,5 2,1 3,4

3.35. Średnia arytmetyczna liczb x, y, z wynosi 7, a wariancja tych liczb jest równa $4\frac{2}{3}$. Oblicz sumę kwadratów tych liczb.

D **3.36.** Suma trzech liczb x, y, z wynosi 6, a ich wariancja jest równa 21. Wykaż, że suma kwadratów tych liczb jest równa 75.

3.37. Średnia arytmetyczna liczb a, b, c, d jest równa 6, a suma kwadratów tych liczb wynosi 170. Wariancja zestawu danych ka, kb, kc, kd wynosi 58,5. Oblicz k.

3.38. Liczby dodatnie x, y, z, t spełniają warunek $4x^2 + t^2 + 2y^2 = 3\cdot(278 - z^2)$. Odchylenie standardowe zestawu liczb $x, x, x, x, y, y, z, z, z, t$ wynosi $0{,}2\sqrt{641}$. Oblicz średnią arytmetyczną tego zestawu.

D **3.39.** Średnia zestawu trzech liczb a, b oraz c jest równa $\overline{x}_1$, a odchylenie standardowe od tej średniej jest równe σ_1. Zestaw trzech liczb $a + 8$, $b + 8$ i $c + 8$ ma średnią arytmetyczną $\overline{x}_2$ i odchylenie standardowe σ_2. Wykaż, że:

a) $\overline{x}_2 = \overline{x}_1 + 8$
b) $\sigma_1 = \sigma_2$

D **3.40.** Dany jest zestaw czterech liczb: $a - 2b$, $a - b$, $a + b$ oraz $a + 2b$, gdzie $a > 2b > 0$. Wykaż, że jeśli odchylenie standardowe od średniej tych liczb jest równe $5\sqrt{10}$, to $b = 10$.

D **3.41.** Liczby a, b, c, d w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Średnia arytmetyczna tych liczb jest równa 2,5, a ich wariancja wynosi 1,25. Wykaż, że $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100$.

3.42. Poniższa tabela przedstawia miesięczne wynagrodzenia netto pracowników pewnej firmy.

Wynagrodzenie miesięczne (zł)	1700	2480	2600	3640	4420	4860	7680	8500	10800
Liczba pracowników	3	2	1	4	3	2	3	2	1

a) Wskaż modę i medianę miesięcznego wynagrodzenia w tej firmie.

b) Oblicz średnią miesięczną płacę. Wynik podaj z dokładnością do jednego grosza.

c) Jaki procent pracowników ma płacę niższą, niż wynosi miesięczna średnia? Wynik zaokrąglij do 1%.

d) Oblicz odchylenie standardowe od średniej miesięcznej płacy. Wynik zaokrąglij do 1 zł.

3.43. Producent czekolady informuje, że jedna tabliczka czekolady waży średnio 120 g ± 1,8 g. Organizacja konsumencka zbadała wagę losowo wybranych 10 tabliczek tego producenta i otrzymała następujące wyniki:

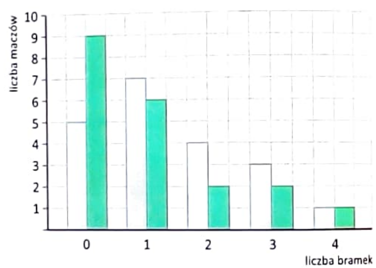
118 g 119 g 121 g 120,5 g 119,5 g 119 g 120 g 122 g 123 g 117 g

a) Oblicz średnią wagę tabliczki czekolady w badanej próbie.

b) Oblicz odchylenie standardowe od średniej wagi tabliczki czekolady.

c) Czy wyniki przeprowadzonego badania pokrywają się z informacją producenta?

3.44. Badano skuteczność dwóch drużyn piłkarskich, porównując liczbę zdobytych bramek w 20 zagranych przez każdą z tych drużyn meczach. Wyniki przedstawia diagram obok.
Oblicz średnią i odchylenie standardowe liczby zdobytych bramek przez każdą z tych drużyn. Scharakteryzuj te drużyny, korzystając z obliczonych wielkości.

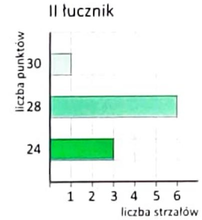


3.45. Na diagramach na następnej stronie przedstawione są wyniki punktowe dwóch łuczników, osiągnięte przez każdego z nich w dziesięciu treningowych strzałach.

a) Podaj medianę punktów zdobytych przez każdego łucznika.

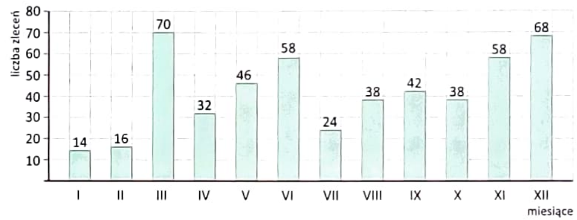
b) Oblicz średnią liczbę punktów w pojedynczym strzale każdego łucznika.

c) Wyznacz odchylenie standardowe od średniej liczby punktów dla każdego łucznika. Wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.



d) Który z zawodników miał bardziej stabilną formę?

3.46. Firma transportowa „Przeprowadzka", zbadała liczbę otrzymanych zleceń w poszczególnych miesiącach 2021 r. Zebrane dane są przedstawione na diagramie kolumnowym.



a) Wyznacz medianę liczby zleceń.

b) Oblicz średnią miesięczną $\overline{x}$ liczby zleceń. W których miesiącach liczba zleceń przekroczyła średnią?

c) Oblicz odchylenie standardowe σ od średniej miesięcznej liczby zleceń.

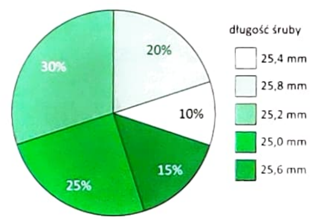
d) W których miesiącach liczba zleceń była mniejsza niż $\overline{x}-\sigma$?

3.47. Zakład produkuje śruby, które mają mieć długość 25,5 mm. Kontrola jakości zmierzyła długości 20 losowo wybranych śrub z danej serii. Poniższy diagram procentowy kołowy ilustruje wyniki pomiarów.

a) Oblicz średnią długość śruby $\overline{x}$ w wylosowanej próbie.

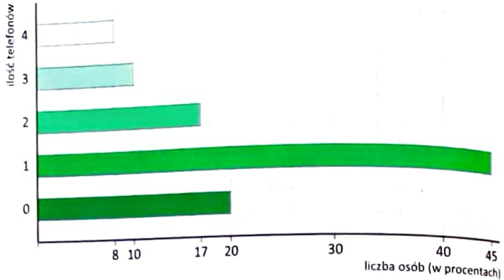
b) Wyznacz odchylenie standardowe σ od średniej długości śruby.

c) Czy wszystkie wyniki pomiarów należą do przedziału $\langle 25{,}5-\sigma; 25{,}5+\sigma\rangle$?



Test sprawdzający do rozdziału 3.

1. Pewna firma telekomunikacyjna przeprowadziła ankietę telefoniczną na próbie 300 losowo wybranych abonentów, pytając o liczbę posiadanych telefonów komórkowych. Wyniki tej sondy są przedstawione na poniższym diagramie.



Ile spośród badanych osób ma co najwyżej dwa telefony komórkowe?

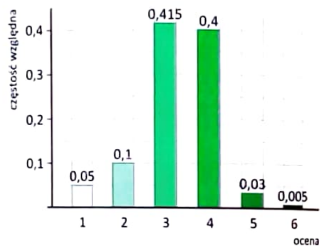
A. 82

B. 65

C. 246

D. 186

2. Diagram obok ilustruje rozkład ocen z matematyki na półrocze, uzyskanych przez wszystkich uczniów pewnej szkoły średniej.



Średnia semestralna ocen z matematyki w tej szkole jest równa:

A. 3,275 B. 3,315

C. 3,405 D. 3,425

3. Przeprowadzono sondę uliczną, zadając pytanie: „Ile godzin w tygodniu przeznacza Pan (Pani) na zajęcia sportowe?" Wyniki tego badania ilustruje tabela obok.

Liczba godzin	0	1	4	6	9	10	12
Liczba osób	5	12	6	15	4	10	2

Moda liczby godzin przeznaczonych tygodniowo na zajęcia sportowe wyniosła:

A. 6 B. 15 C. 9 D. 12

4. Mediana wszystkich rozwiązań równania $\frac{(x^2-1)(2x^3+18x)(x^2-5x+6)}{3x^2+6x+3}=0$ jest równa:

A. 2 B. $1\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

5. Średnia arytmetyczna dwóch liczb dodatnich jest równa 1,2. Wariancja tych liczb wynosi 0,16. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Suma tych liczb jest równa 0,6.

B. Liczby te są równe 1,3 oraz 1,1.

C. Wartość bezwzględna różnicy tych liczb wynosi 1.

D. Jedna liczba jest dwa razy większa od drugiej.

6. Skoczek narciarski wykonał 5 skoków, których długości były równe: 130 m, 120 m, 100 m, 126 m, 124 m. Odchylenie standardowe w tej serii skoków jest liczbą należącą do przedziału:

A. $\left\langle 9, 9\frac{1}{2}\right\rangle$ B. $\left\langle 9\frac{1}{2}, 10\right\rangle$ C. $\left\langle 10, 10\frac{1}{2}\right\rangle$ D. $\left\langle 10\frac{1}{2}, 11\right\rangle$

7. W zestawie danych x, 4, 7, 5, 8, 7, 3, 5, 9, 2 liczba x jest jedyną dominantą. Mediana tych liczb wynosi 6. Wówczas:

A. $x = 5$ B. $x = 6$ C. $x = 7$ D. $x = 8$

8. Niech M_I, M_{II}, M_{III}, M_{IV} oznaczają mediany danych statystycznych, odpowiednio w przypadkach I, II, III, IV.

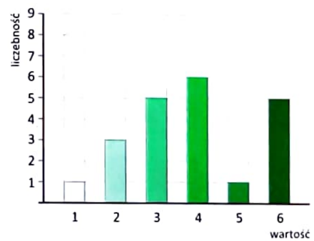
I.

1, 5, 7, 3, 3, 5, 1, 1, 6, 1, 12, 5

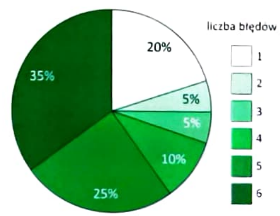
II.

cecha	3	4	5	6	7	8
liczebność	3	4	5	6	7	8

III.



IV



Wskaż zdanie fałszywe.

A. $\frac{M_{III}+M_{IV}}{2}=4\frac{1}{2}$ B. $M_{II} > M_{IV}$ C. $M_I = M_{III}$ D. $M_{II} + M_{III} = 9$

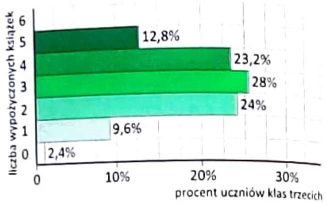
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

9. Liczba lekarzy, pracujących w przychodni zdrowia, jest o 4 większa niż liczba pozostałych pracowników tej przychodni. Średnia pensja lekarzy zatrudnionych w tej przychodni wynosi 3850 zł, zaś średnia pensja pozostałych pracowników jest o 1900 zł niższa. Wiedząc, że średnia płaca wszystkich pracowników tej przychodni jest równa 3090 zł oblicz, ilu lekarzy pracuje w tej przychodni.

10. W pewnym liceum zbadano, ile książek wypożyczyli uczniowie klas trzecich z biblioteki szkolnej w I semestrze. Wyniki przedstawia diagram słupkowy procentowy.

a) Oblicz średnią liczbę książek wypożyczonych przez trzecioklasistę w I semestrze.

b) Wiedząc dodatkowo, że 80 uczniów klas trzecich wypożyczyło więcej książek, niż wynosi średnia przypadająca na jednego ucznia, oblicz liczbę trzecioklasistów tego liceum.



11. Wyznacz liczby naturalne x, y wiedząc, że:

a) średnia arytmetyczna zestawu liczb 3, x, 4, 3, y, 2, 5, 4, 4, 3 wynosi 3,6, a jedyną dominantą tego zestawu jest liczba 3,

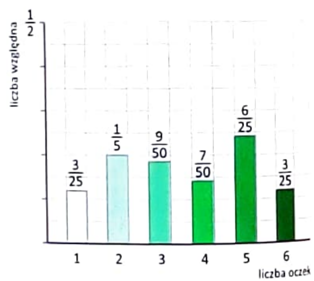
b) średnia arytmetyczna zestawu naturalnych liczb x, y, 3, 5, 1, 7, 8, 12, 15, 10 jest równa 7,1, a mediana tych liczb jest większa od x i wynosi 7,5.

12. Janek zapisał wyniki 50 rzutów sześcienną kostką do gry. Na rysunku obok znajduje się diagram częstości względnych tych wyników.

a) Podaj modę i medianę liczby wyrzuconych oczek.

b) Oblicz średnią liczbę oczek, otrzymanych w pojedynczym rzucie.

c) Wyznacz wariancję i odchylenie standardowe od średniej liczby oczek.



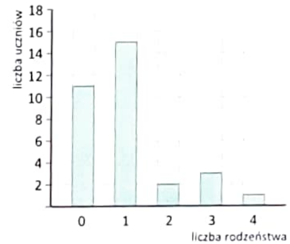
13. Maciek ma z matematyki następujące oceny: 4, 4, 2, 5, 5. Tomek również ma 5 ocen, wśród nich są oceny 2, 3, 3. Wyznacz pozostałe oceny Tomka wiedząc, że jego średnia ocen jest o 1 mniejsza od średniej ocen Maćka, a wariancje ocen obu chłopców są takie same.

14. Diagram słupkowy na rysunku obok przedstawia liczby posiadanego rodzeństwa 32 uczniów tworzących klasę 1b w pewnej szkole podstawowej. Wiadomo, że żadne dwie osoby z tej klasy nie są spokrewnione.

a) Podaj medianę i modę liczby wszystkich dzieci w badanych rodzinach.

b) Oblicz średnią liczbę dzieci w tych rodzinach.

c) Wyznacz odchylenie standardowe od średniej liczby dzieci w rodzinie. Wynik podaj z dokładnością do całości.



15. W pewnej szkole średniej przeprowadzono w klasach drugich sprawdzian diagnostyczny z matematyki. Badaniem objęto 100 uczniów. Za rozwiązania zadań przyznawano całkowite liczby punktów, maksymalnie można było uzyskać 20 punktów. Wyniki procentowe uczniów wraz z odpowiadającymi im wartościami centylowymi ilustruje poniższa tabela.

Wyniki sprawdzianu diagnostycznego z matematyki					
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	1	35	30	70	88
5	3	40	37	75	90
10	6	45	43	80	92
15	10	50	55	85	94
20	15	55	69	90	97
25	19	60	78	95	99
30	25	65	86	100	100

a) Ile punktów zdobyła Kinga, która uzyskała ze sprawdzianu wynik równy 35%?

b) Ile osób osiągnęło wynik lepszy niż Kinga?

c) Ile osób łącznie uzyskało wynik punktowy z przedziału $\langle 13, 17\rangle$?

d) Wskaż modę uzyskanych punktów.

e) Jaka jest mediana wyników?

f) Oblicz średnią liczbę punktów ze sprawdzianu.

4. Rachunek prawdopodobieństwa

Kombinatoryka – powtórzenie

4.1. Z trzech kolorowych papierów Ola wycięła 22 rozróżnialne figury. Liczby różnych figur w danym kolorze przedstawia tabela obok.

	Kolor figury		
Rodzaj figury	niebieski	żółty	czerwony
trójkąty	3	0	2
kwadraty	4	1	5
koła	1	2	4

Oblicz, na ile sposobów można wybrać jeden trójkąt, jeden kwadrat i jedno koło:
a) w takim samym kolorze
b) tak, aby każda figura była w innym kolorze.

4.2. Tworzymy liczbę trzycyfrową, której cyfra setek należy do zbioru $A = \{8, 9\}$, cyfra dziesiątek do zbioru $B = \{0, 1, 2\}$, a cyfra jedności do zbioru $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Oblicz, na ile sposobów możemy utworzyć liczbę:
a) parzystą,
b) większą od 903,
c) której iloczyn cyfr jest liczbą podzielną przez 8,
d) której suma cyfr jest liczbą nieparzystą.

4.3. Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ wybieramy trzy różne cyfry i tworzymy liczbę trzycyfrową. Oblicz, na ile sposobów otrzymamy liczbę:
a) podzielną przez 4
b) większą od 240.

4.4. Oblicz, ile jest liczb czterocyfrowych, które można utworzyć z różnych cyfr należących do zbioru $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i które są:
a) podzielne przez 5
b) mniejsze od 3500.

4.5. Oblicz, na ile sposobów można utworzyć czterocyfrowy kod PIN, w którym:
a) co najmniej jedna cyfra nie jest zerem,
b) pierwsza cyfra jest o 3 większa od ostatniej cyfry,
c) każda kolejna cyfra jest mniejsza od bezpośrednio ją poprzedzającej o 1,
d) suma cyfr jest równa 4.

4.6. Na ile sposobów można utworzyć dziewięciocyfrowy numer telefonu komórkowego, jeśli:
a) wszystkie cyfry tego numeru są różne oraz pierwsza cyfra nie jest równa 0,
b) pierwszą cyfrą tego numeru jest 6 lub 8, a pozostałe cyfry są jednakowe i różne od podanych cyfr,
c) pierwsza i siódma cyfra to cyfry nieparzyste mniejsze od 6, a pozostałe cyfry są większe od 5,
d) początkowe trzy cyfry są różnymi liczbami pierwszymi, a pozostałe cyfry są dowolnymi liczbami parzystymi?

4.7. Mamy prostokątne kawałki materiałów w pięciu różnych kolorach i w jednakowych rozmiarach. Oblicz, na ile sposobów możemy utworzyć chorągiewkę, łącząc ze sobą poziomo trzy takie kawałki:
a) w różnych kolorach,
b) z których dwa są w jednym kolorze, a pozostały kawałek w innym kolorze.

4.8. Oblicz, na ile sposobów można rozmieścić 4 różne listy w pięciu szufladach ponumerowanych kolejno liczbami 1, 2, 3, 4, 5:
a) w dowolny sposób,
b) tak, aby każdy list trafił do innej szuflady,
c) tak, aby każdy list trafił do szuflady oznaczonej liczbą pierwszą,
d) tak, aby co najmniej jeden list trafił do pierwszej szuflady.

4.9. Oblicz, na ile sposobów można ustawić 3 kobiety i 3 mężczyzn w jednej kolejce:
a) dowolnie,
b) tak, aby osoby tej samej płci nie stały obok siebie.

4.10. Oblicz, na ile sposobów można ustawić na półce, w jednym szeregu książki A, B, C, D, E, F, G:
a) w dowolnej kolejności,
b) tak, aby tomy A, B, C stały obok siebie w podanej kolejności,
c) tak, aby książki E i F nie stały obok siebie.

4.11. Oblicz, ile jest różnych:
a) pięciowyrazowych ciągów o wartościach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$,
b) czterowyrazowych ciągów różnowartościowych, o wartościach ze zbioru siedmioelementowego,
c) siedmioelementowych podzbiorów zbioru dziesięcioelementowego,
d) trzywyrazowych ciągów malejących o wartościach ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

4.12. Klasa IV b składa się z 13 dziewcząt i 12 chłopców. Oblicz, na ile sposobów można wybrać z tej klasy:

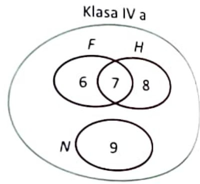
a) kolejno dwie osoby, z których pierwsza będzie przewodniczącą klasy, a druga zastępcą przewodniczącego,

b) dwie osoby, które będą reprezentować klasę poza szkołą,

c) jednego chłopca i jedną dziewczynę,

d) dwie osoby do delegacji, w której będzie co najmniej jedna dziewczyna.

4.13. Wszyscy uczniowie klasy IV a uczą się języka angielskiego oraz co najmniej jednego z trzech języków: francuskiego (F), hiszpańskiego (H) lub niemieckiego (N) – zgodnie z diagramem przedstawionym obok. Na ile sposobów można wybrać z tej klasy jednocześnie dwie osoby:



a) które uczą się języka francuskiego lub języka hiszpańskiego,

b) z których tylko jedna uczy się języka francuskiego,

c) z których co najmniej jedna uczy się języka niemieckiego,

d) z których co najwyżej jedna uczy się zarówno języka francuskiego jak i języka hiszpańskiego.

4.14. W klasie IV c jest 10 dziewcząt i n chłopców, $n > 1$. Oblicz n wiedząc, że liczba możliwych wyborów z tej klasy dwuosobowej delegacji:

a) w której będzie co najwyżej jeden chłopiec, jest równa 185,

b) w której będzie co najmniej jeden chłopiec, jest równa 255.

4.15. Danych jest 8 punktów, z których dowolne trzy nie są współliniowe. Oblicz:

a) ile różnych prostych można poprowadzić przez te punkty,

b) ile można utworzyć różnych trójkątów, których wierzchołkami są trzy punkty wybrane z danych punktów.

4.16. W klasie jest 17 chłopców i 15 dziewcząt. Oblicz, na ile sposobów można wybrać z tej klasy trzyosobową delegację, składającą się:

a) z jednego chłopca i dwóch dziewczyn,

b) z co najmniej dwóch dziewczyn,

c) z co najmniej jednego chłopca,

d) z co najwyżej dwóch dziewczyn.

4.17. Ile różnych kodów literowych można ułożyć, przestawiając litery wyrazu:

a) MAMA b) BAOBAB c) PRABABCIA d) KAWALKADA?

4.18. Oblicz, na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 5 kart, w których będą:

a) trzy asy i dwie damy b) jeden as, jeden król i jedna dama

c) co najwyżej jeden król d) co najmniej trzy asy.

Doświadczenie losowe

4.19. Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie kostką dwunastościenną. Zapisz przestrzeń zdarzeń elementarnych, jeśli:

a) ścianki kostki mają różne numery od 1 do 12,

b) wszystkie ścianki kostki są rozróżnialne, 5 ścianek jest czerwonych, 4 ścianki są niebieskie, 2 zielone i jedna jest fioletowa.

4.20. Doświadczenie losowe polega na rzucie jedną monetą oraz dziesięciościenną kostką do gry, która na każdej ściance ma umieszczoną inną cyfrę. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne tego doświadczenia. Następnie opisz symbolicznie przestrzeń zdarzeń elementarnych.

4.21. Dane są zbiory: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Tworzymy liczbę dwucyfrową, wybierając losowo cyfrę dziesiątek ze zbioru A i cyfrę jedności ze zbioru B. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne tego doświadczenia. Następnie opisz symbolicznie przestrzeń zdarzeń elementarnych.

4.22. Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy kolejno dwie cyfry i zapisujemy je w kolejności losowania, tworząc liczbę dwucyfrową. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia w przypadku, gdy:

a) losowanie odbywa się bez zwracania wylosowanej liczby do zbioru A,

b) losowanie odbywa się ze zwracaniem wylosowanej liczby.

4.23. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy kolejno dwie cyfry i zapisujemy liczbę dwucyfrową. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego i określ liczbę tych zdarzeń, jeśli losowanie odbywa się:

a) ze zwracaniem b) bez zwracania.

4.24. Określamy współrzędne punktu P na płaszczyźnie w układzie współrzędnych w następujący sposób. Ze zbioru wszystkich cyfr losujemy kolejno dwie cyfry. Pierwsza wylosowana cyfra oznacza pierwszą współrzędną punktu P, zaś druga cyfra – drugą współrzędną punktu P. Zapisz symbolicznie przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia i określ liczbę zdarzeń elementarnych, jeśli losowanie odbywa się:

a) ze zwracaniem b) bez zwracania.

4.25. Ze zbioru $A = \{x, y, z, t\}$ losujemy kolejno trzy różne litery i zapisujemy je w kolejności losowania, tworząc kod trzyliterowy. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne tego doświadczenia losowego, korzystając z drzewa stochastycznego. Podaj liczbę tych zdarzeń.

4.26. Ze zbioru $A = \{x, y, z\}$ losujemy ze zwracaniem kolejno trzy znaki i zapisujemy je w kolejności losowania, tworząc kod trzyliterowy. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych i podaj liczbę tych zdarzeń.

4.27. Na poszczególnych ściankach czworościennej kostki znajdują się różne liczby pierwsze, mniejsze od 10. Rzucamy trzy razy tą kostką. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia losowego i podaj jej moc.

4.28. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego, polegającego na pięciokrotnym rzucie jedną monetą, i podaj jej moc.

4.29. Rzucamy trzy razy ośmiościenną kostką do gry z kolejnymi liczbami od 1 do 8 na poszczególnych ściankach. Opisz symbolicznie przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego i podaj jej moc.

4.30. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy cztery razy jedną cyfrę i tworzymy liczbę czterocyfrową, w której cyfrą tysięcy, setek, dziesiątek i jedności są kolejno wylosowane cyfry. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego i określ liczbę tych zdarzeń, jeśli losowanie odbywa się:

a) ze zwracaniem b) bez zwracania.

4.31 Rzucamy pięć razy czworościenną kostką, której różne ścianki mają różne kolory: czerwony, niebieski, szary i zielony. Opisz symbolicznie przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego i podaj liczbę tych zdarzeń.

4.32. Zakładamy, że wszystkie kule opisane w zadaniu są rozróżnialne. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla następującego doświadczenia losowego:

a) losowanie jednej kuli z pudełka, w którym są 3 kule białe, 2 czerwone i 1 niebieska,

b) losowanie jednocześnie dwóch kul z pojemnika, w którym są 2 kule białe i 3 czerwone.

4.33. Klasa IV f składa się z 12 dziewcząt i 13 chłopców. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego, polegającego na losowym wyborze z tej klasy:

a) kolejno jednej dziewczyny i jednego chłopca,

b) kolejno dwóch osób (kolejność losowania jest ważna),

c) jednocześnie dwóch osób (kolejność losowania nie jest ważna).

W każdym przypadku oblicz liczbę zdarzeń elementarnych.

4.34. Na dworzec kolejowy przyszła grupa składająca się z 7 osób. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych następującego doświadczenia losowego:

a) losowy wybór jednej osoby, która zakupi bilety w kasie dla całej grupy,

b) losowe ustawienie w kolejce wszystkich osób do jednej kasy biletowej.

W obu przypadkach podaj liczbę zdarzeń elementarnych.

4.35. Mamy 7 ponumerowanych szuflad i 4 czapki: białą, czarną, niebieską i szarą. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych i podaj liczbę tych zdarzeń dla następujących doświadczeń losowych:

a) losowe włożenie czapek do szuflad,

b) losowe włożenie czapek do szuflad tak, aby żadne dwie czapki nie były w tej samej szufladzie.

4.36. Piotrek z talii kart wybrał same figury, tzn. po cztery asy, króle, damy i walety. Następnie przetasował wybrane karty i wylosował kolejno trzy spośród nich. Pierwszą kartę otrzymała jego siostra Tosia, drugą – brat Janek, a trzecią kartę zachował dla siebie. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia losowego i podaj ich liczbę.

4.37. Bartek wykonuje rzut trzema monetami o różnych nominałach: 10 gr, 20 gr, 50 gr i zapisuje na kartce poszczególne nominały lub wpisuje dla danej monety wartość 0 – jeśli wypadnie orzeł. Wypisz wszystkie możliwe wyniki takiego doświadczenia losowego.

4.38. Basia ma w dwóch pudełkach kartki z zapisanymi cyframi, po jednej na każdej kartce. W pierwszym pudełku są cztery kartki odpowiednio z cyframi 1, 2, 3, 4, w drugim – dwie kartki odpowiednio z cyframi 5 i 6. Basia chce wybrać losowo jedną kartkę z cyfrą w następujący sposób. Wykona rzut monetą: jeśli wypadnie reszka, to Basia wylosuje kartkę z pierwszego pudełka; jeśli wypadnie orzeł, to dziewczynka wybierze losowo kartkę z drugiego pudełka. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne danego doświadczenia losowego.

Zdarzenia. Działania na zdarzeniach

4.39. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu jednej karty z talii 52 kart. Oznaczmy zdarzenia: A – wylosowana karta jest pikiem, B – wylosowana karta jest koloru czerwonego, C – wylosowana karta jest asem. Opisz słowami zdarzenia: $A \cap C$, $B \cap C$, $A - C$, B', $B' - A$, $A' \cap C$.

4.40. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu jednej liczby ze zbioru $\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Oznaczmy zdarzenia: A – wylosowana liczba jest liczbą pierwszą, B – wylosowana liczba jest większa od 12, C – wylosowana liczba jest podzielna przez 3. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom: A, B, C, $A - B$, $A' \cup C$, $C \cap B'$, $A' \cup B'$.

4.41. Na poszczególnych ściankach dziesięciościennej kostki znajdują się pojedynczo cyfry od 0 do 9. Wykonujemy jeden rzut tą kostką.

a) Określ przestrzeń zdarzeń elementarnych.

b) Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne, sprzyjające poszczególnym zdarzeniom:
A – wypadła liczba pierwsza,
B – wypadła liczba nieparzysta,
C – wypadła liczba podzielna przez 4 lub równa 6.

c) Jaka zależność zachodzi między zdarzeniami $A \cup B$ i C?

4.42. Rzucamy dwa razy monetą.

a) Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom:
A – co najmniej raz wypadł orzeł, B – reszka wypadła tylko raz. Jaka zależność zachodzi między zdarzeniami A i B?

b) Opisz słownie zdarzenia A' oraz B'.

c) Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom $A' \cup B$ oraz $B' \cap A$. Podaj zależność między tymi zdarzeniami.

4.43. Rzucamy jeden raz monetą i jeden raz sześcienną kostką do gry, która na poszczególnych ściankach ma liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom:

A – wypadł orzeł lub reszka i liczba 5,

B – wypadła reszka i liczba oczek będąca liczbą pierwszą,

C – wypadła liczba, będąca dzielnikiem liczby 12,

D – wypadł orzeł lub wypadła liczba 1.

4.44. Rzucamy trzykrotnie monetą. Oznaczmy zdarzenia: A – reszka wypadła co najwyżej raz, B – orzeł wypadł co najmniej raz, C – reszka wypadła dwa razy.

a) Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom: A, B, C, A', B', C'.

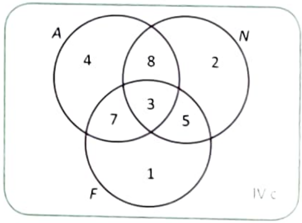
b) Podaj, jaka zależność zachodzi między następującymi zdarzeniami:
A i B, C i B, $A \cup C$ i B, B' i A.

c) Opisz zdarzenia $B \cup C'$ oraz $B' \cap C$.

4.45. Klasa IV a składa się z 33 osób. 15 uczniów tej klasy trenuje siatkówkę, 12 uczniów trenuje koszykówkę, a tylko 8 osób nie trenuje żadnej z wymienionych dyscyplin. Liczba osób trenujących jednocześnie siatkówkę i koszykówkę jest najmniejsza z możliwych. Wybieramy losowo jedną osobę z tej klasy. Niech S oznacza zdarzenie: wybrana osoba trenuje siatkówkę, zaś K – zdarzenie, że wybrana osoba trenuje koszykówkę. Opisz poniższe zdarzenia i podaj ich moc.

a) $S \cap K'$ b) $(K - S) \cup (S - K)$ c) $K' \cap S'$

4.46. Poniższy diagram przedstawia liczbę uczniów klasy IV c, podzieloną na liczby osób uczących się poszczególnych języków obcych: języka angielskiego (A), języka niemieckiego (N) i języka francuskiego (F). Wiadomo, że każda osoba z tej klasy uczy się co najmniej jednego z tych języków. Z klasy IV c wybrano losowo jedną osobę. Ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu, że wybrana osoba:



a) uczy się jednocześnie wszystkich wymienionych języków,

b) uczy się języka niemieckiego lub francuskiego,

c) nie uczy się języka niemieckiego,

d) uczy się co najmniej dwóch języków,

e) uczy się języka angielskiego i nie uczy się języka francuskiego,

f) nie uczy się języka niemieckiego lub nie uczy się języka francuskiego?

Zapisz te zdarzenia za pomocą zdarzeń A, F, N.

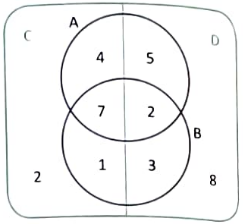
4.47. W klasie IV d jest 18 dziewcząt i 14 chłopców. Wiadomo, że 22 osoby uczęszczają na koło chemiczne lub koło biologiczne jak na diagramie poniżej. Z tej klasy wybrano losowo jedną osobę. Niech zdarzenia A, B, C, D oznaczają odpowiednio zdarzenia:

A – wybrana osoba chodzi na koło chemiczne,

B – wybrana osoba chodzi na koło biologiczne,

C – wybrana osoba jest chłopcem,

D – wybrana osoba jest dziewczyną.



Opisz słownie poniższe zdarzenie. Podaj, ile zdarzeń elementarnych sprzyja temu zdarzeniu.

a) $A \cup C$ b) $D \cap (A \cup B)$

c) $C \cap B'$ d) $A' \cup B'$

e) $A' \cap B' \cap D$ f) $A \cap (C \cup D)$.

4.48. W klasie IV e uczy się 28 osób. Wiadomo, że 7 osób z tej klasy uczęszcza tylko na kółko teatralne, 8 osób tylko na kółko przyrodnicze, a 4 osoby uczęszczają na oba te kółka. Pozostali uczniowie nie mają dodatkowych zajęć. Wybieramy losowo jedną osobę z danej klasy. Niech A oznacza zdarzenie – wybrana osoba uczęszcza na kółko teatralne, zaś B zdarzenie – wybrana osoba uczęszcza na kółko przyrodnicze. Zapisz za pomocą zdarzeń A i B zdarzenia:

a) wybrana osoba nie chodzi na kółko teatralne,

b) wybrana osoba nie uczęszcza na żadne z kół,

c) wybrana osoba uczęszcza na co najmniej jedno koło,

d) wybrana osoba uczęszcza tylko na jedno koło.

Podaj moc każdego z tych zdarzeń.

4.49. Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie dwiema sześciennymi kostkami do gry: czarną i zieloną. Oblicz, ile jest takich wyników doświadczenia, dla których:

a) suma oczek na obu kostkach jest podzielna przez 3,

b) iloczyn oczek na obu kostkach jest liczbą większą od 5.

4.50. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ losujemy kolejno dwie liczby bez zwracania. Oblicz, ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu:

a) A – iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą podzielną przez 4,

b) B – suma otrzymanych liczb jest liczbą pierwszą.

4.51. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie. Oblicz, ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu A – suma wylosowanych liczb jest liczbą parzystą, jeśli:

a) losujemy ze zwracaniem b) losujemy bez zwracania.

4.52. Ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Oblicz, ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu:

a) A – iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą podzielną przez 2 i przez 3,

b) B – iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą podzielną przez 2 lub przez 3.

4.53. Ze zbioru cyfr różnych od 0 losujemy kolejno trzy cyfry ze zwracaniem i tworzymy liczbę trzycyfrową. Oblicz, ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu:

a) A – co najmniej dwie cyfry otrzymanej liczby są równe 4,

b) B – tylko jedna cyfra otrzymanej liczby jest większa od 6,

c) C – co najwyżej jedna cyfra otrzymanej liczby jest liczbą pierwszą,

d) D – tylko dwie cyfry otrzymanej liczby są nie mniejsze niż 7.

Określenie prawdopodobieństwa

4.54. Wiadomo, że A, B są zdarzeniami zawartymi w przestrzeni Ω oraz $P(A) = 0{,}4$ i $P(B) = 0{,}5$. Oblicz $P(A \cup B)$, jeśli:

a) $P(A \cap B) = 0{,}3$ b) $A \cap B = \varnothing$ c) $A \subset B$.

4.55. Wiadomo, że A, B są zdarzeniami zawartymi w przestrzeni Ω oraz $P(A) = 0{,}8$ i $P(B) = 0{,}6$. Oblicz $P(A \cap B)$, jeśli:

a) $P(A \cup B) = 0{,}9$ b) $A \cup B = \Omega$ c) $A \cup B = A$.

4.56. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A') = 0{,}69$ oraz $P(B') = 0{,}3$.

a) Oblicz $P(A)$ i $P(B)$.

b) Czy zdarzenia A i B się wykluczają? Odpowiedź uzasadnij.

4.57. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A \cup B) = 0{,}5$ i $P(A) = P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Oblicz $P(B')$ oraz $P(B - A)$.

4.58. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$. Wiadomo, że $P(A') = 0{,}83$ i $P(B') = 0{,}88$ oraz $P(A \cap B) = 0{,}04$. Oblicz:

a) $P(A \cup B)$ b) $P((A \cup B) - A)$ c) $P(A \cap B')$.

4.59. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$. Wiadomo, że $P(A') = 0{,}91$ i $P(A \cap B) = 0{,}01$ oraz $P(A \cup B) = 0{,}21$. Oblicz: $P(B)$, $P(B - (A \cap B))$, $P((A \cup B) - (A \cap B))$.

4.60. Kostka sześcienna do gry z liczbami oczek od 1 do 6 została wykonana z materiału, który nie jest jednorodny. Ścianka z jednym oczkiem wypada dwa razy częściej niż każda z pozostałych ścianek. Wykonujemy jeden rzut tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania nieparzystej liczby oczek.

4.61. Na ośmiościennej kostce do gry na dwóch ściankach znajduje się liczba 2, na trzech ściankach liczba 3, a na pozostałych ściankach odpowiednio liczby 4, 5, 6. Wykonujemy jeden rzut tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – wypadła liczba oczek będąca liczbą pierwszą.

4.62. W rzucie niesymetryczną sześcienną kostką do gry ścianka z dwoma oczkami i ścianka z sześcioma oczkami wypada trzy razy częściej niż każda z pozostałych ścianek. Rzucamy jeden raz tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo wypadnięcia ścianki:

a) z jednym oczkiem b) z sześcioma oczkami c) z parzystą liczbą oczek.

4.63. W pudełku znajdują się kartki z różnymi numerami. Prawdopodobieństwo wylosowania kartki z numerem nie większym niż 5 jest równe $\frac{4}{5}$, a prawdopodobieństwo wylosowania kartki z numerem nie mniejszym niż 5 jest równe $\frac{1}{3}$. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kartki z numerem 5.

4.64. Strzelec strzela 4 razy do celu. Prawdopodobieństwo, że trafi co najmniej trzy razy, jest równe $\frac{4}{5}$. Prawdopodobieństwo, że trafi co najwyżej trzy razy, wynosi $\frac{3}{5}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że strzelec w jednej serii trafi w cel trzy razy?

D **4.65.** O zdarzeniach $A, B \subset \Omega$ wiadomo, że $P(A) \leqslant \frac{2}{3}$, $P(B') = \frac{5}{8}$ oraz $P(A \cap B) \geqslant 0{,}125$. Wykaż, że $P(A \cup B) \leqslant \frac{11}{12}$.

D **4.66.** O zdarzeniach $A, B \subset \Omega$ wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{3}$ oraz $P(B) = \frac{3}{5}$. Wykaż, że $P(A' \cap B) \geqslant \frac{4}{15}$.

Obliczanie prawdopodobieństwa

4.67. Symetryczna sześcienna kostka ma trzy ścianki niebieskie, jedną czerwoną, jedną zieloną i jedną białą. Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo:

a) otrzymania ścianki zielonej lub niebieskiej,

b) nieotrzymania ścianki w kolorze czerwonym.

4.68. Rzucamy jeden raz symetryczną ośmiościenną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) A – wypadła parzysta liczba oczek lub liczba oczek mniejsza od 4,

b) B – wypadła nieparzysta liczba oczek i jednocześnie nie będąca dzielnikiem liczby 6.

4.69. Rzucamy symetryczną dziesięciościenną kostką do gry, z liczbami od 0 do 9 na poszczególnych ściankach. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby, która jest:

a) liczbą pierwszą i nie jest liczbą nieparzystą,

b) podzielna przez 3 lub jest większa od 7.

4.70. Sześcian pomalowano, a następnie rozcięto na 64 jednakowych wymiarów sześcianiki, które wrzucono do pudełka i wymieszano. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z tego pudełka jednego sześcianika, który będzie miał:

a) trzy ściany pomalowane,

b) jedną lub dwie ściany pomalowane.

4.71. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania karty, która jest:

a) treflem lub pikiem b) asem i nie jest treflem

c) królem lub kierem d) kierem lub dwójką i nie jest figurą.

4.72. Ze zbioru liczb dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wylosowana liczba jest podzielna przez 2 i przez 5,

b) wylosowana liczba jest podzielna przez 2 lub przez 5,

c) wylosowana liczba jest podzielna przez 10 lub przez 15,

d) wylosowana liczba jest podzielna przez 15 i nie jest podzielna przez 20.

4.73. Ze zbioru liczb dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) liczby, której reszta z dzielenia przez 8 jest równa 2 lub 3,

b) liczby, której reszta z dzielenia przez 6 jest parzysta.

4.74. Ze zbioru liczb trzycyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) liczby podzielnej przez 2 lub przez 3,

b) liczby podzielnej przez 5 i jednocześnie niepodzielnej przez 3.

4.75. Ze zbioru liczb trzycyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) liczby, której reszta z dzielenia przez 4 jest równa 3,

b) liczby, której reszta z dzielenia przez 7 jest równa 2.

4.76. Liczby uczniów z klas II a, II b i II c uczęszczających na SKS pozostają odpowiednio w stosunku 3 : 2 : 5. Z tej grupy uczniów wybrano losowo jedną osobę. Oblicz prawdopodobieństwo wybrania osoby z klasy II a.

4.77. W skrzyni znajdują się piłki niebieskie i piłki czerwone, przy czym niebieskich jest o 5 więcej, niż czerwonych. Prawdopodobieństwo wylosowania jednej piłki czerwonej jest równe $\frac{2}{9}$. Ile piłek niebieskich jest w tej skrzyni?

4.78. W klasie IV a jest o 4 chłopców więcej niż dziewcząt. Prawdopodobieństwo wylosowania z tej klasy chłopca jest równe $\frac{9}{16}$. Oblicz, ile osób jest w klasie IV a.

4.79. Rzucamy jedną symetryczną monetą i jedną kostką do gry. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne dla tego doświadczenia. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wypadł orzeł i parzysta liczba oczek,

b) wypadł orzeł lub parzysta liczba oczek.

4.80. Rzucamy kolejno trzy razy symetryczną monetą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) orzeł wypadnie co najwyżej raz,

b) reszka wypadnie co najmniej raz,

c) za drugim razem wypadnie orzeł, a za trzecim reszka.

4.81. Rzucamy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia – suma liczb wyrzuconych oczek jest:

a) mniejsza od 10

b) liczbą pierwszą.

4.82. Rzucamy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia – wartość bezwzględna różnicy liczb wyrzuconych oczek jest:

a) podzielna przez 3

b) dzielnikiem liczby 12.

4.83. Rzucamy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest:

a) większy od 4 i mniejszy od 13

b) podzielny przez 4 lub przez 6.

4.84. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia – iloraz liczby oczek wyrzuconych w pierwszym rzucie przez liczbę oczek wyrzuconych w drugim rzucie jest:

a) liczbą nie większą od 0,75

b) liczbą całkowitą.

4.85. Ze zbioru cyfr $\{5, 6, 7, 8\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem dwie cyfry i tworzymy liczbę dwucyfrową. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne dla tego doświadczenia. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) utworzona liczba jest większa od 65,

b) utworzona liczba jest podzielna przez 4,

c) suma cyfr tej liczby jest liczbą pierwszą,

d) cyfra dziesiątek różni się od cyfry jedności o 1.

4.86. Ze zbioru cyfr $\{6, 7, 8, 9\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie cyfry i tworzymy liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) utworzona liczba jest nie większa od 86,

b) utworzona liczba jest podzielna przez 3,

c) suma cyfr tej liczby jest liczbą nieparzystą,

d) cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności.

4.87. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy ze zwracaniem kolejno dwie cyfry i tworzymy liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) utworzona liczba jest podzielna przez 11,

b) utworzona liczba jest nieparzysta,

c) iloczyn cyfr tej liczby jest większy od 10,

d) co najmniej jedna cyfra tej liczby jest parzysta.

4.88. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy kolejno dwie cyfry bez zwracania i tworzymy liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) otrzymana liczba jest większa od 35,

b) otrzymana liczba jest podzielna przez 6.

4.89. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy ze zwracaniem kolejno dwie cyfry i tworzymy liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) utworzona liczba jest podzielna przez 11,

b) utworzona liczba jest nieparzysta,

c) iloczyn cyfr tej liczby jest większy od 50,

d) co najmniej jedna cyfra tej liczby jest parzysta.

4.90. Rzucamy dwiema dziesięciościennymi symetrycznymi kostkami. Każda z nich ma na poszczególnych ściankach liczby: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) suma otrzymanych liczb jest podzielna przez 7,

b) iloczyn otrzymanych liczb jest podzielny przez 3 lub przez 5.

4.91. Kasia w jednej szufladzie ma 3 torebki: białą, czarną i zieloną, a w drugiej szufladzie cztery apaszki: białą, czarną i dwie zielone. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybierając losowo jedną torebkę i jedną apaszkę, Kasia otrzyma je w jednym kolorze.

4.92. Z talii 52 kart losujemy kolejno bez zwracania dwa razy po jednej karcie. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) pierwsza z wylosowanych kart jest pikiem, a druga jest asem,

b) co najmniej jedna z wylosowanych kart jest pikiem,

c) co najwyżej jedna z wylosowanych kart jest asem,

d) żadna z wylosowanych kart nie jest asem ani pikiem.

4.93. W klasie IV c jest 21 dziewcząt i 11 chłopców. Wybieramy losowo kolejno dwie osoby z tej klasy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowaliśmy:

a) jedną dziewczynę i jednego chłopca,

b) co najmniej jedną dziewczynę.

4.94. Student umie odpowiedzieć na 30 spośród 50 pytań zamieszczonych w zestawie egzaminacyjnym. Losuje dwa pytania. Jeśli odpowie dobrze na przynajmniej jedno z nich, to zda egzamin. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że student zda egzamin.

4.95. W pudełku znajdują się 4 losy wygrywające i 6 losów pustych. Losujemy dwa losy. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

a) dwóch losów wygrywających,

b) co najmniej jednego losu wygrywającego.

4.96. Na loterii znajduje się 6 losów wygrywających: jeden z wygraną 30 zł, dwa z wygraną 20 zł i trzy z wygraną 10 zł. Pozostałe 4 losy są puste. Losujemy dwa losy. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania 30 zł.

4.97. W pudełku znajdują się rozróżnialne kule: 2 czerwone, 3 białe i 5 niebieskich. Losujemy kolejno bez zwracania dwa razy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) obie wylosowane kule mają taki sam kolor,

b) żadna z wylosowanych kul nie jest czerwona.

4.98. Ze zbioru wierzchołków pewnego wielokąta wypukłego wybieramy losowo dwa wierzchołki. Prawdopodobieństwo wybrania wierzchołków wyznaczających przekątną tego wielokąta jest równe 0,8. Ile wierzchołków ma wielokąt?

4.99. W pudełku jest pewna liczba kul białych i jedna kula czarna, wszystkie kule są rozróżnialne. Losujemy jedną kulę, zatrzymujemy ją, a następnie z pozostałych kul losujemy jedną kulę. Ile powinno być kul białych w pudełku, aby prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych było równe $\frac{2}{3}$?

4.100. W klasie IV b jest 9 dziewcząt i pewna liczba chłopców. Wybieramy losowo kolejno dwie osoby z tej klasy. Prawdopodobieństwo wybrania co najmniej jednej dziewczynki jest równe $\frac{6}{7}$. Ilu chłopców jest w tej klasie?

4.101. W skrzyni jest pewna liczba piłek do siatkówki i mniejsza liczba piłek do koszykówki – razem 9 piłek. Ile jest piłek do siatkówki, jeśli przy jednoczesnym losowaniu z tej skrzyni dwóch piłek prawdopodobieństwo wylosowania piłek do tej samej dyscypliny sportowej jest takie samo, jak prawdopodobieństwo wylosowania do dwóch różnych dyscyplin?

4.102. Przestawiając dowolnie cyfry 1, 2, 3, 4, 5 tworzymy losowo pięciocyfrowy kod. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) najpierw ustawione są wszystkie cyfry, będące liczbami parzystymi; następnie cyfry, będące liczbami nieparzystymi,

b) cyfry 1, 2, 3 stoją w podanej kolejności obok siebie.

4.103. Mały chłopczyk przestawia losowo 4 klocki z literami A, A, M, M. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że chłopiec ułoży słowo MAMA.

4.104. Cztery ponumerowane kule umieszczono losowo w pięciu ponumerowanych szufladach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) A – każda kula trafi do innej szuflady,

b) B – wszystkie kule trafią do jednej szuflady.

4.105. Na parterze bloku, mającego oprócz parteru 6 pięter, wsiadło do windy 5 osób. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wszystkie osoby wysiądą na jednym piętrze (kolejność wychodzenia z windy na jednym piętrze nie jest istotna),

b) każda osoba wysiądzie na innym piętrze.

4.106. W szeregu ustawiamy losowo 4 kobiety i 4 mężczyzn. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) najpierw stoją kobiety, a potem mężczyźni,

b) żadne dwie osoby tej samej płci nie stoją obok siebie.

4.107. Sześciu przyjaciół, wśród nich Jarek i Marek, wybrało się do kina. Mają bilety z kolejnymi miejscami w jednym rzędzie. Zakładając, że usiądą losowo na tych miejscach, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) Jarek i Marek usiądą na miejscach najbardziej od siebie odległych,

b) Jarek i Marek usiądą na dwóch pierwszych miejscach, w podanej kolejności, licząc od lewej strony,

c) między Jarkiem i Markiem usiądzie jeszcze jedna osoba.

Doświadczenia losowe wieloetapowe

4.108. Symetryczna sześcienna kostka do gry ma cyfrę 1 na jednej ściance, cyfrę 2 na dwóch ściankach i cyfrę 3 na trzech ściankach. Wykonujemy dwukrotny rzut tą kostką i z cyfr, które otrzymaliśmy, tworzymy liczbę dwucyfrową. Wykonaj drzewo dla tego doświadczenia i oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) otrzymana liczba dwucyfrowa jest pierwsza,

b) cyfra dziesiątek otrzymanej liczby jest większa od cyfry jedności.

4.109. Na sześciennej symetrycznej kostce do gry cztery ściany są pomalowane na biało, a dwie – na czerwono. Wykonujemy trzy rzuty tą kostką. Wykonaj drzewo dla tego doświadczenia i oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymamy ścianę czerwoną:

a) tylko jeden raz

b) co najmniej 2 razy.

4.110. Na czworościennej symetrycznej kostce jedna ścianka ma cyfrę 1, a pozostałe ścianki – cyfrę 2. Rzucamy 4 razy tą kostką i z otrzymanych cyfr tworzymy liczbę czterocyfrową. Wykonaj drzewo dla tego doświadczenia i oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymana liczba:

a) jest większa od 1500

b) jest mniejsza od 2200

c) jest nie mniejsza niż 1222

d) ma cyfrę setek mniejszą od cyfry jedności.

4.111. W rzucie niesymetryczną monetą prawdopodobieństwo otrzymania orła jest równe $\frac{2}{5}$, a reszki wynosi $\frac{3}{5}$. Wykonujemy czterokrotny rzut tą monetą. Narysuj drzewo dla tego doświadczenia i oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) co najmniej raz wypadła reszka

b) wypadły trzy orły i reszka.

4.112. Michał trenuje koszykówkę. Z linii rzutów wolnych trafia do kosza średnio 8 razy na 10 rzutów. Sędzia podyktował trzy rzuty wolne w wykonaniu Michała. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że Michał trafi do kosza:

a) trzy razy

b) co najmniej jeden raz.

4.113. Biatlonistka w pojedynczym strzale trafia do celu z prawdopodobieństwem 0,9. Na zawodach jedna seria strzałów składa się z 5 prób. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że biatlonistka w jednej serii trafi do celu:

a) pięć razy

b) cztery razy.

4.114. Rzucamy kolejno pięć razy symetryczną monetą. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) A – co najmniej raz wypadła reszka,

b) B – co najwyżej raz wypadł orzeł.

4.115. Rzucamy czterokrotnie ośmiościenną kostką do gry, z liczbami odpowiednio 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 na poszczególnych ścianach. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) co najmniej raz wypadła liczba podzielna przez 3,

b) co najwyżej raz wypadła liczba 8.

Zmienna losowa. Wartość oczekiwana zmiennej losowej

4.116. W pudełku znajduje się 50 kul. Na jednej kuli jest liczba 20, na czterech kulach jest liczba 10, na dziesięciu kulach jest liczba 2, a na pozostałych kulach jest liczba 0. Gracz wyciąga losowo jedną kulę z pudełka. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartość równą liczbie na wyciągniętej kuli. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X i oblicz jej wartość oczekiwaną.

4.117. W pudełku znajduje się 40 losów. Dwa losy dają wygraną po 20 zł, dwa losy dają wygraną po 10 zł, pięć losów daje wygraną po 5 zł, trzydzieści losów daje wygraną po 2 zł, a jeden los to przegrana w wysokości 100 zł. Gracz wyciąga jeden los. Niech zmienna losowa X oznacza wygraną w tej grze. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X i oblicz jej wartość oczekiwaną.

4.118. W pudełku znajdują się cztery kartki oznaczone odpowiednio numerami: -1, 0, 1, 2. Gracz losuje z pudełka jednocześnie dwie kartki i dodaje liczby, które znajdują się na tych kartkach. Otrzymany wynik jest jego wygraną. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej w tej grze.

4.119. W pudełku znajdują się cztery kartki oznaczone odpowiednio numerami: -1, 0, 1, 2. Gracz losuje z pudełka dwa razy po jednej kartce – zwracając po pierwszym losowaniu kartkę do pudełka – i dodaje liczby, które znajdują się na tych kartkach. Otrzymany wynik jest jego wygraną. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej w tej grze.

4.120. W pudełku znajduje się pięć kul oznaczonych odpowiednio liczbami: 2, -1, 0, 1, 2. Gracz losuje z pudełka jednocześnie dwie kule i mnoży liczby znajdujące się na tych kulach. Otrzymany wynik jest jego wygraną. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej w tej grze.

4.121. W pudełku znajduje się pięć kul oznaczonych odpowiednio liczbami: -2, -1, 0, 1, 2. Gracz losuje z pudełka dwa razy po jednej kuli – zwracając po pierwszym losowaniu kulę do pudełka – i mnoży liczby, które znajdują się na tych kulach. Otrzymany wynik jest jego wygraną. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej w tej grze.

4.122. Gracz rzuca dwa razy sześcienną kostką do gry i dodaje liczby uzyskanych oczek. Uzyskany wynik stanowi wygraną gracza w złotych, z takim wyjątkiem, że jeśli wypadną dwie jedynki, to gracz przegrywa 250 zł.

a) Oblicz wartość oczekiwaną wygranej w tej grze.

b) Czy jest to gra sprawiedliwa?

4.123. Gracz rzuca dwiema sześciennymi kostkami do gry. Jeśli na każdej kostce wypadnie sześć oczek, to wygrywa 110 zł, jeśli wypadną jednakowe liczby oczek, ale różne od sześciu, to wygrywa x zł. W pozostałych przypadkach przegrywa $2x$ zł. Wyznacz x tak, aby wartość oczekiwana wygranej gracza w tej grze była równa 0.

4.124. Na początku gry każdy gracz wpłaca s zł. Następnie rzuca czterema symetrycznymi monetami. Jeśli wypadną cztery orły, to wygrywa 400 zł. Jeśli wypadną trzy orły, to wygrywa 120 zł. W pozostałych przypadkach nic nie wygrywa. Wyznacz rozkład zmiennej losowej, oznaczającej zysk gracza w tej grze i oblicz s tak, aby gra była sprawiedliwa.

4.125. Rzucamy monetą oraz dwa razy czworościenną kostką, której ścianki są oznaczone liczbami: 0, 1, 2, 3, po jednej liczbie na każdej ściance. Jeśli wypadnie orzeł, to otrzymane dwie liczby dodajemy. Jeśli wypadnie reszka, to otrzymane dwie liczby mnożymy. Niech zmienna losowa X oznacza uzyskany wynik. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X i oblicz jej wartość oczekiwaną.

Test sprawdzający do rozdziału 4.

1. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach?

A. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ B. 9^4 C. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ D. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8$

2. Ile jest różnych liczb trzycyfrowych, w zapisie których występuje jedna cyfra 0?

A. 243 B. 162 C. 81 D. 144

3. Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie symetryczną monetą. Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω składa się z:

A. 6 elementów B. 7 elementów C. 8 elementów D. 9 elementów

4. Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech A oznacza zdarzenie – wypadła liczba oczek mniejsza niż 4, zaś B oznacza zdarzenie – wypadła liczba oczek nie większa niż 4. Wówczas:

A. $A = B$ B. $A \cup B = \Omega$ C. $A' \cap B = \emptyset$ D. $A \cap B = A$

5. Ze zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy kolejno 2 cyfry bez zwracania i tworzymy liczbę dwucyfrową. Niech A oznacza zdarzenie – utworzona liczba jest liczbą parzystą i jednocześnie liczbą większą od 60. Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest równa:

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

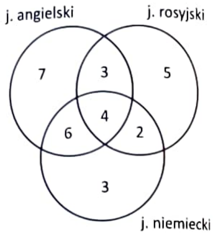
6. Ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy jedną liczbę. Niech A oznacza zdarzenie – wylosowana liczba jest pierwsza. Wówczas:

A. $A' = \{2, 3, 5, 7\}$
B. $A' = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$
C. $A' = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$
D. $A' = \{0, 4, 6, 8, 9\}$

7. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu A – w pierwszym rzucie otrzymaliśmy liczbę oczek mniejszą niż w drugim rzucie?

A. 12 B. 15 C. 18 D. 21

8. Wśród 30 pracowników pewnej firmy przeprowadzono ankietę, dotyczącą ich znajomości języków obcych. Diagram obok przedstawia wyniki tej ankiety. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba z grupy badanych zna co najmniej dwa języki obce, jest równe:



A. $\frac{11}{15}$ B. $\frac{14}{25}$ C. $\frac{11}{25}$ D. $\frac{1}{2}$

9. W siedmiokącie wypukłym prowadzimy wszystkie proste, łączące dwa dowolne jego wierzchołki. Następnie wybieramy losowo jedną z tych prostych. Prawdopodobieństwo, że wylosowana prosta zawiera przekątną tego siedmiokąta, jest równe:

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{5}{6}$

10. Ze zbioru liczb $\{0, 1, 2, 3, 4, ..., 14, 15\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3 lub przez 5 jest równe:

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{16}$ D. $\frac{1}{2}$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

11. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, w których zapisie:
a) występuje jedna cyfra 0, jedna cyfra 1 i dwie cyfry 2,
b) nie występuje żadna z cyfr: 1, 2, 3, 4?

12. Ile można utworzyć dziewięciocyfrowych numerów telefonów komórkowych, których pierwsza cyfra jest większa od 4, wszystkie cyfry są różne, a ostatnią cyfrą jest 0?

13. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla następujących doświadczeń losowych:
a) losowanie kolejno dwóch elementów: pierwszego ze zbioru $\{a, b, c\}$, drugiego ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$,
b) losowanie kolejno czterech cyfr ze zwracaniem ze zbioru $\{1, 2, 3\}$,
c) losowanie kolejno bez zwracania trzech liter ze zbioru $\{A, B, C, D, E, F\}$.

14. W grupie 25 osób wszyscy czytają klasykę. Dodatkowo każda z tych osób czyta poezję lub prozę, przy czym 14 osób czyta poezję, a 20 osób czyta prozę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana osoba z tej klasy czyta zarówno poezję, jak i prozę.

15. Rzucamy jeden raz symetryczną dwunastościenną kostką z zapisanymi pojedynczo liczbami 1, 2, 3, ..., 11, 12 na poszczególnych ściankach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wypadła liczba:
a) będąca wielokrotnością liczby 3 lub liczby 4,
b) większa od 3 i niepodzielna przez 6.

16. W pudełku znajduje się 5 kul białych i pewna liczba kul czerwonych. Ile co najwyżej kul czerwonych jest w pudełku, jeżeli prawdopodobieństwo wylosowania jednej kuli czerwonej jest mniejsze od $\frac{4}{7}$?

17. Ze zbioru liczb naturalnych trzycyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że:
a) wylosowana liczba jest podzielna przez 11,
b) wylosowano liczbę o niepowtarzających się cyfrach i jednocześnie podzielną przez 4.

18. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w pierwszym rzucie wypadła liczba oczek:
a) niepodzielna przez 4,
b) co najmniej o 2 mniejsza niż w drugim rzucie.

19. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma liczb wyrzuconych oczek jest:
a) nie większa niż 8
b) podzielna przez 2 lub przez 5.

20. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy kolejno dwie cyfry ze zwracaniem i tworzymy liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że powstała liczba dwucyfrowa jest:

a) podzielna przez 6
b) niepodzielna przez 5.

21. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, ..., 7\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby i od pierwszej wylosowanej liczby odejmujemy drugą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania różnicy większej od 2.

22. Tworzymy liczbę dwucyfrową w następujący sposób: ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy cyfrę dziesiątek, zaś ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$ losujemy cyfrę jedności. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że utworzona liczba jest:

a) mniejsza od 53
b) podzielna przez 4 lub przez 3.

23. Z talii 52 kart losujemy kolejno dwa razy po jednej karcie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

a) jednej damy i jednego króla
b) dwóch kart, które nie są kierami
c) co najmniej jednego pika
d) co najwyżej jednej damy.

24. W worku znajduje się 10 piłeczek pingpongowych: 6 pomarańczowych i 4 białe. Antek wyjmuje losowo jedną piłeczkę i – nie zwracając jej – losuje drugą piłeczkę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) dwie wylosowane piłeczki są w jednym kolorze,
b) druga wylosowana piłeczka jest biała.

25. W klasach trzecich szkoły podstawowej zorganizowano koło taneczne, na które uczęszczają dzieci według tabeli zamieszczonej poniżej.

Klasa	III a	III b	III c
Dziewczęta	5	6	9
Chłopcy	10	3	7

Wybieramy losowo kolejno dwie osoby z tej grupy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy:

a) dwóch chłopców,
b) co najmniej jedną dziewczynkę z klasy III c,
c) chłopca i dziewczynkę z tej samej klasy,
d) dwie dziewczynki z różnych klas.

26. Mamy 5 książek, wśród których są książki A i B. Ustawiamy je losowo na pustej półce w jednym szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) książki A i B będą stały obok siebie na końcu tego rzędu (po lewej lub prawej stronie, w dowolnej kolejności),
b) pomiędzy książkami A i B będzie stała jedna książka.

27. Mamy symetryczną sześcienną kostkę, której jedna ścianka jest biała, dwie ścianki są czerwone i trzy ścianki są zielone. Rzucamy trzy razy tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że:

a) co najwyżej 2 razy wypadła ścianka biała,
b) ścianka zielona wypadła tylko jeden raz.

28. Rzucamy siedem razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) co najmniej raz wypadła reszka,
b) reszka wypadła co najwyżej jeden raz.

29. Na loterii znajdują się 4 losy z wygraną 50 zł i 8 losów pustych. Wyciągamy z pudełka dwa losy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wygramy co najmniej 50 zł.

30. W pudełku są 3 losy dające wygraną po 40 zł, 4 losy dające wygraną po 20 zł i 93 losy puste. Gracz wpłaca 10 zł i wyciąga 2 losy z pudełka. Wyznacz rozkład zmiennej losowej, oznaczającej zysk w tej grze i oblicz jej wartość oczekiwaną.

5. Geometria przestrzenna. Wielościany

Płaszczyzny i proste w przestrzeni. Równoległość prostych i płaszczyzn. Proste skośne

5.1. Naszkicuj sześcian i wybierz dwie krawędzie k i m prostopadłe do siebie. Następnie wskaż krawędź l, która jest prostopadła do krawędzi m oraz:

a) przecina się z krawędzią k,

b) jest równoległa do krawędzi k,

c) jest skośna do krawędzi k.

5.2. Dane są proste k, l, m. Ustal, jak mogą być położone względem siebie proste k i m, jeśli:

a) proste k i l są skośne oraz $l \parallel m$,

b) proste k, l, m nie leżą w jednej płaszczyźnie, ale prosta l ma jeden punkt wspólny z prostą k i jeden punkt wspólny z prostą m.

D **5.3.** Proste m i l wyznaczają płaszczyznę π. Prosta k jest równoległa do prostej l i ma jeden punkt wspólny z prostą m. Wykaż, że prosta k zawiera się w płaszczyźnie π.

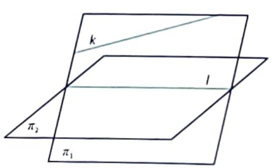
5.4. Niech π oznacza płaszczyznę, natomiast k, l niech będą prostymi w przestrzeni. Czy prawdziwe jest następujące twierdzenie:

a) jeśli $l \subset \pi$ i $k \parallel \pi$, to $k \parallel l$ b) jeśli $l \subset \pi$ i $k \parallel l$, to $k \parallel \pi$?

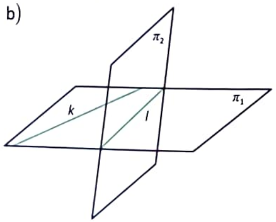
Odpowiedź uzasadnij.

5.5. Na rysunku poniżej prosta l jest krawędzią przecięcia płaszczyzn π_1 oraz π_2. Wskaż punkt, w którym prosta k zawarta w płaszczyźnie π_1 i nierównoległa do krawędzi l przebija płaszczyznę π_2. Odpowiedź uzasadnij.

a)



b)



D **5.6.** Dane są punkty A, B należące do płaszczyzny π oraz punkt C poza tą płaszczyzną. Punkt P należy do odcinka AC, a punkt Q – do odcinka BC. Wykaż, że:

a) jeśli $|AP| = |PC|$ oraz $|BQ| = |QC|$, to prosta PQ jest równoległa do płaszczyzny π.

b) jeśli $|AP| \cdot |CQ| = |PC| \cdot |BQ|$, to prosta PQ jest równoległa do płaszczyzny π.

D **5.7.** Punkty A, B, C, D nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wiadomo, że $|AB| = |BC|$. Punkty P, Q, R są odpowiednio środkami odcinków AD, BD, CD. Wykaż że:

a) trójkąt PQR jest równoramienny,

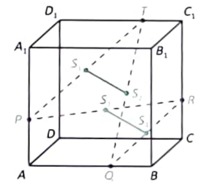
b) płaszczyzna (PQR) jest równoległa do płaszczyzny (ABC).

D **5.8.** Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Punkty P, Q, R, T leżą na krawędziach tego sześcianu, jak na rysunku obok. Środkami odcinków TP, TQ, RP i RQ są odpowiednio punkty S_1, S_2, S_3, S_4. Wykaż, że:

a) prosta S_1S_2 jest równoległa do płaszczyzny (ABB_1A_1),

b) proste S_1S_2 i S_3S_4 są do siebie równoległe,

c) proste BC i RQ są skośne.

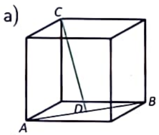


Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni

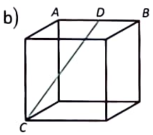
D **5.9.** W trójkącie prostokątnym ABC bok AC jest przeciwprostokątną. Odcinek BS jest prostopadły do płaszczyzny (ABC). Punkt D należy do odcinka CS. Wykaż, że trójkąt ABD jest prostokątny.

5.10. Dany jest sześcian, w którym punkt D jest środkiem odcinka AB. Na podstawie danych na rysunku poniżej oceń, czy odcinek AB jest prostopadły do odcinka CD. Odpowiedź uzasadnij.

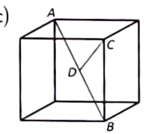
a)



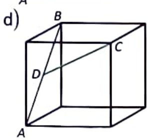
b)



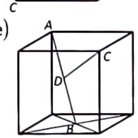
c)



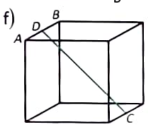
d)



e)

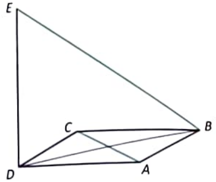


f)

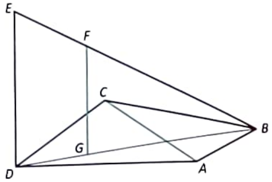


5.11. Przekątne równoległoboku $ABCD$ przecinają się w punkcie O. Punkt S nie należy do płaszczyzny $(ABCD)$. Wiadomo, że $|AS| = |SC|$ oraz $|SD| = |SB|$. Czy odcinek SO jest prostopadły do płaszczyzny $(ABCD)$? Odpowiedź uzasadnij.

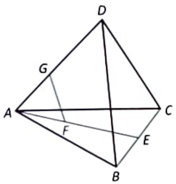
D **5.12.** Romb $ABCD$ zawiera się w płaszczyźnie π. Punkt E znajduje się poza płaszczyzną π oraz odcinek ED jest prostopadły do płaszczyzny π (zobacz rysunek obok). Wykaż, że proste AC i BE są prostopadłe.



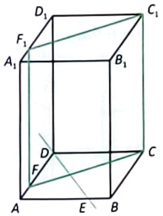
5.13. Na płaszczyźnie π leży czworokąt $ABCD$. Poza płaszczyzną π znajduje się punkt E i odcinek ED jest prostopadły do płaszczyzny π (zobacz rysunek obok). Ponadto wiadomo, że $F \in EB$, $G \in DB$ i $|EF| : |FB| = |DG| : |GB|$. Czy proste FG i AC są prostopadłe? Odpowiedź uzasadnij.



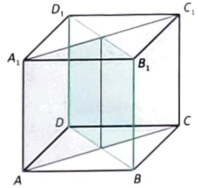
5.14. Punkty A, B, C, D nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wiadomo, że $|AC| = |AB|$, $|CD| = |BD|$. Punkt E jest środkiem boku BC oraz $F \in AE$, $G \in AD$, jak na rysunku obok. Czy proste GF i BC są prostopadłe? Odpowiedź uzasadnij.



5.15. Dany jest prostopadłościan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ o podstawie kwadratowej $ABCD$. Punkty E, F, F_1 dzielą odpowiednio krawędzie AB, AD i A_1D_1 tak, że $\frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|AF|}{|DF|} = \frac{|A_1F_1|}{|D_1F_1|} = \frac{1}{4}$. Czy prosta DE jest prostopadła do płaszczyzny (FCC_1F_1)? Odpowiedź uzasadnij.



5.16. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Czy płaszczyzny (ACC_1A_1) i (BB_1D_1D) są prostopadłe? Odpowiedź uzasadnij.



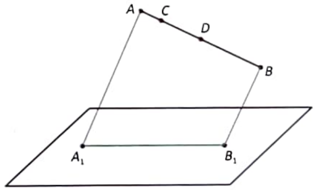
Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę

5.17. W pewnym rzucie równoległym na płaszczyznę obrazem odcinka jest punkt. Jak jest położony ten odcinek względem prostej, wyznaczającej kierunek rzutowania?

5.18. W pewnym rzucie równoległym na płaszczyznę obrazem pięciokąta jest odcinek. Jak jest położona prosta, wyznaczająca kierunek tego rzutowania, względem płaszczyzny, w której zawarty jest pięciokąt?

5.19. W rzucie równoległym na płaszczyznę π obrazem danego koła jest koło do niego przystające. Jak są położone względem siebie rzutnia i płaszczyzna zawierająca dane koło?

5.20. Na rysunku obok dany jest odcinek AB oraz A_1B_1, będący rzutem równoległym odcinka AB na płaszczyznę π w kierunku prostej AA_1. Punkty C, D należą do odcinka AB oraz $|CD| = 2|AC|$ i $|AD| = |DB|$. Wyznacz rzuty równoległe punktów C, D na płaszczyznę π. W jakim stosunku punkty C_1, D_1 dzielą odcinek A_1B_1?



5.21. Wysokość CD trójkąta ABC dzieli podstawę AB na dwa odcinki, których długości pozostają w stosunku 1 : 3. Odcinek CE jest środkową tego trójkąta. Narysuj rzut równoległy tego trójkąta w przypadku, gdy bok AB jest równoległy do rzutni, a płaszczyzna (ABC) nie jest równoległa do rzutni i nie jest równoległa do prostej, wyznaczającej kierunek rzutowania. Zaznacz rzut wysokości CD oraz rzut środkowej CE. W jakim stosunku punkty D_1 i E_1 dzielą bok A_1B_1 trójkąta $A_1B_1C_1$?

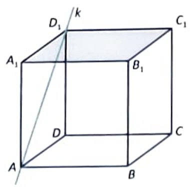
5.22. Naszkicuj rzut równoległy sześciokąta foremnego w przypadku, gdy dwa boki sześciokąta są równoległe do rzutni, ale sześciokąt zawiera się w płaszczyźnie nierównoległej do rzutni i nierównoległej do kierunku rzutowania. Następnie poprowadź przekątne w danym sześciokącie i przekątne w rzucie tego sześciokąta. Co zauważyłeś?

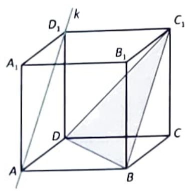
5.23. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Niech płaszczyzna $(ABCD)$ będzie rzutnią, a prosta AD_1 – kierunkiem rzutu równoległego na płaszczyznę $(ABCD)$. Naszkicuj obraz w tym rzucie:

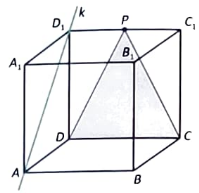
a) kwadratu $A_1B_1C_1D_1$

b) trójkąta DBC_1

c) trójkąta DCP, gdzie punkt P jest środkiem odcinka D_1C_1







5.24. W trójkącie prostokątnym ABC punkt O jest środkiem przeciwprostokątnej AB. Punkt S nie należy do płaszczyzny (ABC). Wiadomo, że $|AS| = |SB| = |SC|$. Wykaż, że odcinek SO jest prostopadły do płaszczyzny (ABC).

5.25. Odcinek AB zawarty w płaszczyźnie π ma długość 120 cm. Odległość punktu C leżącego poza płaszczyzną π od punktu A jest taka sama jak od punktu B i wynosi 61 cm. Rzut prostokątny punktu C na płaszczyznę π należy do odcinka AB. Oblicz odległość punktu C od płaszczyzny π.

5.26. Dane są punkty A, B należące do płaszczyzny π oraz punkt C, który leży w odległości 9 cm od płaszczyzny π, w odległości $\sqrt{106}$ cm od punktu A i w odległości 15 cm od punktu B. Punkt C' jest rzutem prostokątnym punktu C na płaszczyznę π oraz $|\sphericalangle AC'B| = 90^\circ$. Oblicz długość odcinka AB.

5.27. Rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π jest punkt A'. Do prostej k zawartej w płaszczyźnie π i przechodzącej przez punkt A' należą punkty B, C, a punkt B leży między punktami A' i C. Wiedząc, że $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 9$ cm oraz $|AC| = 17$ cm, oblicz odległość punktu A od płaszczyzny π.

Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

5.28. Punkty A, B C, D nie leżą w jednej płaszczyźnie. Odcinek CD jest prostopadły do odcinka AC i do odcinka BC. Punkt E jest środkiem odcinka AB. Wykaż, że jeśli $ED \perp AB$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

5.29. W trójkącie różnobocznym ABC punkt E jest środkiem odcinka BC. Odcinek AD jest prostopadły do płaszczyzny (ABC). Czy prosta DE jest prostopadła do prostej BC? Odpowiedź uzasadnij.

5.30. Dany jest kwadrat $ABCD$. Odcinek DE jest prostopadły do płaszczyzny $(ABCD)$. Wykaż, że trójkąty ABE oraz BCE są prostokątne.

5.31. W równoległoboku $ABCD$ przekątna DB jest jednocześnie wysokością poprowadzoną na boki AD i BC. Proste DB i AC przecinają się w punkcie O. Odcinek EO jest prostopadły do płaszczyzny $(ABCD)$. Wykaż, że trójkąty BCE i ADE są prostokątne.

5.32. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość: $|AC| = 15$ cm, $|BC| = 20$ cm. Odcinek DC jest prostopadły do płaszczyzny (ABC) i ma długość 22,5 cm. Oblicz wysokość trójkąta ABD, poprowadzoną na bok AB.

5.33. W trójkącie prostokątnym ABC wysokość CD poprowadzona na przeciwprostokątną AB dzieli ją na odcinki długości: $|AD| = 9$ cm i $|DB| = 4$ cm. Odcinek EC jest prostopadły do płaszczyzny (ABC). Wiedząc, że pole trójkąta ABC jest o 26 cm^2 mniejsze od pola trójkąta ABE, oblicz odległość punktu E od płaszczyzny (ABC).

5.34. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 60$ cm, $|AC| = |BC| = 50$ cm. Odcinek AD jest prostopadły do płaszczyzny (ABC). Odległość punktu D od prostej BC jest równa 52 cm. Oblicz odległość punktu D od płaszczyzny (ABC).

Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny

5.35. Prosta k przebija płaszczyznę π w punkcie A. Punkt B należy do prostej l, która jest rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę π oraz $|AB| = 8$ cm. Oblicz odległość punktu B od prostej k, jeśli kąt nachylenia prostej k do płaszczyzny π ma miarę:

a) 30° b) 45° c) 60°.

5.36. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$, którego bok ma długość a. Oblicz tangens kąta nachylenia przekątnej AC_1 do płaszczyzny (BCC_1B_1).

5.37. Płaszczyzny π_1 i π_2 są prostopadłe, a krawędzią ich przecięcia jest prosta m. Punkt A należy do płaszczyzny π_1 i leży w odległości 8 cm od prostej m. Punkt B należy do płaszczyzny π_2 i leży w odległości 6 cm od prostej m. Wiedząc, że rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π_2 jest ten sam punkt co rzut prostokątny punktu B na płaszczyznę π_1, oblicz:

a) tangens kąta nachylenia prostej AB do płaszczyzny π_2,

b) cosinus kąta nachylenia prostej AB do płaszczyzny π_1.

5.38. Na płaszczyźnie π dany jest odcinek AB. Odcinek BC jest prostopadły do płaszczyzny π. Punkt D jest środkiem odcinka BC. Wiedząc, że tangens nachylenia prostej AD do płaszczyzny π wynosi $\frac{2}{3}$, oblicz sinus kąta nachylenia prostej AC do płaszczyzny π.

5.39. Punkty A, B, C leżące na płaszczyźnie π wyznaczają trójkąt równoramienny, w którym $|AC| = |BC| = 5$ oraz $|AB| = 6$. Odcinek DC jest prostopadły do płaszczyzny π, a jego długość jest równa 8. Oblicz:

a) tangens kąta nachylenia prostej BD do płaszczyzny π,

b) tangens kąta nachylenia płaszczyzny (ABD) do płaszczyzny π.

5.40. Trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$, $|AC| = 20$, oraz $|AB| = 12$, zawiera się w płaszczyźnie π. Odcinek DC jest prostopadły do płaszczyzny π i ma długość 12. Oblicz:

a) sinus kąta nachylenia prostej AD do płaszczyzny π,

b) sinus kąta nachylenia płaszczyzny (ABD) do płaszczyzny π.

5.41. Trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$, $|AB| = 10$ oraz $|BC| = 6$, zawiera się w płaszczyźnie π. Odcinek CD jest prostopadły do płaszczyzny π i ma długość 8. Oblicz:

a) miarę kąta nachylenia prostej AD do płaszczyzny π,

b) cosinus kąta nachylenia prostej BD do płaszczyzny π,

c) tangens kąta nachylenia płaszczyzny (ABD) do płaszczyzny π.

Graniastosłupy

D **5.42.** Wykaż, że długość przekątnej sześcianu o krawędzi długości a jest równa $a\sqrt{3}$.

a) Wyznacz cosinus kąta nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy.

b) Oblicz a w przypadku, gdy przekątna sześcianu ma długość 3 cm.

D **5.43.** Wykaż, że długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach długości a, b, c jest równa $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu i miarę kąta nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy w przypadku, gdy krawędzie podstawy mają długość: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, zaś krawędź boczna ma długość $c = 5$ cm.

5.44. Stosunek długości krawędzi prostopadłościanu wynosi $3 : 4 : 12$, a długość przekątnej prostopadłościanu jest równa 26 cm. Oblicz długości przekątnych trzech nieprzystających ścian.

5.45. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz:

a) tangens kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,

b) sinus kąta między przekątną ściany bocznej a przekątną podstawy, wychodzącymi z tego samego wierzchołka,

c) cosinus kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

5.46. Krawędź boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość $\sqrt{8}$, a krawędź podstawy ma długość 2. Oblicz:

a) cosinus kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,

b) sinus kąta między przekątną jednej ściany bocznej a krawędzią podstawy zawartą w sąsiedniej ścianie bocznej, wychodzącymi z tego samego wierzchołka,

c) miarę kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej.

5.47. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, którego bok ma długość $5\sqrt{3}$ cm. Wiedząc, że wysokość graniastosłupa jest równa 8 cm, a dłuższa przekątna graniastosłupa ma 17 cm długości, oblicz:

a) miarę kąta ostrego rombu,

b) długość krótszej przekątnej tego graniastosłupa.

5.48. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb. Wysokość tego graniastosłupa jest równa 12 cm. Dłuższa przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 45^\circ$, a krótsza pod kątem $\beta = 60^\circ$. Oblicz długość krawędzi podstawy.

5.49. Oblicz długości przekątnych graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego długość krawędzi podstawy jest równa 3 cm, a krawędzi bocznej – 8 cm.

5.50. Liczba naturalna parzysta n oznacza liczbę wierzchołków pewnego graniastosłupa.

a) Zapisz liczbę s ścian i liczbę k krawędzi tego graniastosłupa w zależności od n.

b) Oblicz liczbę ścian i liczbę krawędzi graniastosłupa w przypadku, gdy $n = 10$.

5.51. W pewnym graniastosłupie liczba ścian jest o 5 mniejsza od liczby wierzchołków. Oblicz liczbę wierzchołków, liczbę ścian i liczbę krawędzi tego graniastosłupa.

5.52. W pewnym graniastosłupie liczba krawędzi jest dwa i pół razy większa od liczby ścian. Jakie wielokąty są podstawami tego graniastosłupa?

Ostrosłupy

5.53. Oblicz, ile ścian oraz ile krawędzi ma ostrosłup, którego liczba wierzchołków jest równa:

a) 6

b) n, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$ i $n > 3$.

5.54. Oblicz, ile wierzchołków ma ostrosłup, którego liczba ścian jest o 6 mniejsza od liczby krawędzi.

5.55. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy jest równa 20 cm, a kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę 60°. Oblicz:

a) długość krawędzi bocznej,

b) wysokość ostrosłupa,

c) wysokość ściany bocznej.

5.56. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy jest równa $4\sqrt{2}$ cm, a krawędzi bocznej – 5 cm. Oblicz:

a) wysokość tego ostrosłupa,

b) wysokość ściany bocznej poprowadzoną na krawędź podstawy,

c) odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznej.

5.57. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 9 cm, a wysokość ściany bocznej jest równa $3\sqrt{3}$ cm. Oblicz:

a) miarę kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,

b) odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od ściany bocznej.

5.58. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi ma miarę 90°. Przekątna podstawy ostrosłupa ma długość 5 dm. Oblicz:

a) sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa,

b) miarę kąta zawartego między dwiema sąsiednimi krawędziami bocznymi ostrosłupa.

5.59. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przeciwległe krawędzie boczne są do siebie prostopadłe. Wyznacz tangens kąta α nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy i podaj przybliżoną miarę tego kąta (z dokładnością do 1°).

5.60. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 12 dm, a krawędź boczna 8 dm. Oblicz:

a) wysokość tego ostrosłupa,

b) miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

D 5.61. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy jest sześć razy dłuższa od wysokości tego ostrosłupa. Wykaż, że ściana boczna w tym ostrosłupie jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°.

5.62. Dany jest czworościan foremny o wysokości H i krawędzi długości a.

D a) Wykaż, że $3H^2 = 2a^2$.

b) Wiedząc dodatkowo, że wysokość jest o 1 krótsza od krawędzi, oblicz a. Wynik przedstaw w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{N}$.

5.63. Dany jest czworościan foremny. Oblicz:

a) tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy,

b) cosinus kąta dwuściennego między sąsiednimi ścianami.

5.64. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 30 cm, a kąt dwuścienny przy jego podstawie jest równy 60°. Oblicz:

a) wysokość ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka ostrosłupa,

b) długość krawędzi podstawy.

5.65. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45°. Oblicz:

a) sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy,

b) cosinus kąta między krawędzią boczną ostrosłupa a krawędzią podstawy.

5.66. Oblicz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego do płaszczyzny podstawy, jeśli:

a) wysokość ostrosłupa jest trzy razy krótsza od krawędzi podstawy,

b) wysokość ostrosłupa jest równa krawędzi podstawy.

5.67. Oblicz miarę kąta dwuściennego przy podstawie ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, jeśli:

a) wysokość ostrosłupa jest trzy razy krótsza od wysokości podstawy,

b) wysokość ostrosłupa jest dwa razy krótsza od krawędzi podstawy.

5.68. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 2 dm, a krawędź boczna – $2\sqrt{2}$ dm. Oblicz:

a) miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy,

b) wysokość ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka ostrosłupa.

5.69. Wysokość prawidłowego ostrosłupa sześciokątnego wynosi $5\sqrt{3}$ cm, a kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi jest równy 60°. Oblicz:

a) sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa,

b) sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

5.70. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, którego boki mają długość 6 cm i 8 cm. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają po 13 cm długości. Oblicz:

a) wysokość ostrosłupa,

b) wysokości h_1 i h_2 dwóch różnych ścian bocznych poprowadzone z wierzchołka tego ostrosłupa.

5.71. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny, którego dwa boki mają długość 17 cm, a długość trzeciego boku jest równa 16 cm. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Oblicz:

a) wysokość ostrosłupa

b) długość krawędzi bocznych ostrosłupa.

5.72. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt, którego boki mają długość 21 cm, 17 cm i 10 cm. Wysokość ostrosłupa jest równa $5\frac{2}{3}$ cm. Oblicz:

a) długość krawędzi bocznych tego ostrosłupa,

b) cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

5.73. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, którego kąt między ramionami jest równy 120°. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $4\sqrt{3}$. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa $\sqrt{33}$, oblicz:

a) długość krawędzi bocznych,

b) cosinusy kątów między krawędziami bocznymi tego ostrosłupa.

5.74. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, którego jeden z kątów jest równy 150°, a dwa jego boki mają długość $9\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Krawędź boczna ostrosłupa ma długość 15. Wyznacz:

a) wysokość tego ostrosłupa,

b) cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

5.75. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC. Spodek wysokości jest środkiem przeciwprostokątnej AB. Wiedząc, że ostrosłup ma wysokość 7 cm, a krawędź AC ma długość 8 cm, oblicz:

a) sumę długości krawędzi bocznych tego ostrosłupa,

b) sinus kąta nachylenia krawędzi AS do płaszczyzny podstawy.

5.76. Podstawą ostrosłupa prostego $ABCS$ jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych AC i BC, gdzie $|AC| = 6$ i $|BC| = 8$. Wysokość tego ostrosłupa jest równa 12. Oblicz:

a) tangensy kątów nachylenia ścian ACS i BCS do płaszczyzny podstawy,

b) odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznych.

5.77. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym przyprostokątne mają długość: $|AC| = 9$, $|BC| = 16$. Spodkiem wysokości ostrosłupa jest wierzchołek C. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa 12, oblicz:

a) długość boków trójkąta ABS,

b) odległość punktu C od krawędzi bocznej BS,

c) tangens kąta nachylenia płaszczyzny (ABS) do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

5.78. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat, a spodek wysokości znajduje się w jednym z wierzchołków tego kwadratu. Wiedząc, że wysokość tego ostrosłupa jest równa krawędzi podstawy, wyznacz:

a) tangens kąta nachylenia najdłuższej krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy,

b) cosinus kąta między najdłuższą krawędzią boczną ostrosłupa a krawędzią podstawy o wspólnym wierzchołku,

c) miarę kąta nachylenia ścian bocznych, które nie zawierają wysokości ostrosłupa, do płaszczyzny podstawy,

d) miarę kąta dwuściennego między dwiema ścianami bocznymi o największej powierzchni.

5.79. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość 6 i 8. Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym α takim, że $\cos\alpha = \frac{8}{17}$. Oblicz:

a) wysokość tego ostrosłupa,

b) długości krawędzi bocznych tego ostrosłupa.

5.80. Podstawą ostrosłupa jest romb, którego bok ma długość 20 cm, a kąt ostry jest równy 60°. Punkt przecięcia się przekątnych rombu jest spodkiem wysokości ostrosłupa. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa $5\sqrt{6}$ cm, oblicz:

a) wysokość ściany bocznej poprowadzonej na krawędź podstawy,

b) sinus kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu

5.81. Narysuj:

a) cztery różne siatki sześcianu,

b) dwie różne siatki prostopadłościanu, którego żadna ściana nie jest kwadratem.

5.82. Narysuj siatkę graniastosłupa:

a) prawidłowego czworokątnego,

b) prawidłowego trójkątnego,

c) prawidłowego sześciokątnego,

d) prostego, którego podstawą jest równoległobok.

5.83. Narysuj siatkę ostrosłupa:

a) prawidłowego czworokątnego,

b) prawidłowego trójkątnego,

c) prawidłowego sześciokątnego,

d) prostego, którego podstawą jest prostokąt.

5.84. Przekątna prostopadłościanu ma długość 17 cm, a cosinus kąta nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{15}{17}$. Stosunek długości krawędzi podstawy wynosi 3 : 4. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.

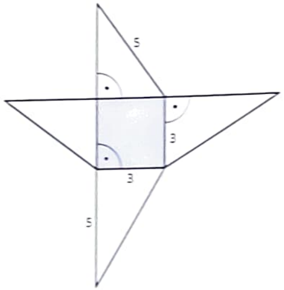
5.85. Narysuj siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest trójkąt prostokątny:

a) o przyprostokątnych pozostających w stosunku 2 : 3, a spodek wysokości jest wierzchołkiem tego trójkąta przy kącie prostym,

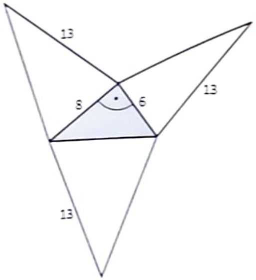
b) równoramienny, a spodek wysokości jest środkiem przeciwprostokątnej tego trójkąta.

5.86. Na podstawie informacji umieszczonych poniżej, na siatce ostrosłupa wyznacz wysokość tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że jego podstawą jest:

a) kwadrat



b) trójkąt prostokątny



5.87. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu, jeśli:

a) przekątna ściany bocznej ma długość 2 dm,

b) przekątna sześcianu ma długość 8 cm.

5.88. Przekątna podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $6\sqrt{2}$ cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa, jeśli:

a) wysokość graniastosłupa jest równa 5 cm,

b) krawędź podstawy stanowi 75% krawędzi bocznej.

5.89. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym stosunek pola powierzchni całkowitej do pola powierzchni bocznej wynosi 8 : 5. Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej jest równe 192 cm^2, oblicz długości krawędzi tego graniastosłupa.

5.90. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu, jeśli przekątna ściany bocznej ma długość 30 cm oraz kąt między tą przekątną i przekątną sąsiedniej ściany bocznej, wychodzącymi z tego samego wierzchołka, ma 60°.

5.91. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu wynosi $50\left(3+2\sqrt{3}\right)$ cm^2. Przekątna jednej ze ścian bocznych jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°, a przekątna sąsiedniej ściany bocznej jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz długości krawędzi tego prostopadłościanu.

5.92. Przekątna ściany bocznej i krawędź boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, wychodzące z tego samego wierzchołka, tworzą kąt 30°. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $350\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz długość przekątnej ściany bocznej.

5.93. Pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe sumie pól obu podstaw. Wyznacz tangens kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej tego graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

5.94. W graniastosłupie prostym podstawa jest rombem, którego przekątne mają długość 30 cm i 16 cm. Dłuższa przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

5.95. Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok o bokach długości 2 dm i 4 dm, którego kąt ostry jest równy 60°. Krótsza przekątna graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

5.96. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest równa $2\sqrt{3}$ cm, a kąt między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej ma 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

5.97. Oblicz długość krawędzi podstawy prawidłowego ostrosłupa czworokątnego, wiedząc, że krawędź boczna ma długość 5, a pole powierzchni całkowitej jest równe 16.

5.98. Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego, którego krawędź ma długość 10 cm.

5.99. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi $136\sqrt{3}$ cm^2, a pole podstawy jest równe $64\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

5.100. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt prostokątny równoramienny, którego ramię ma długość $6\sqrt{2}$ cm. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa 8 cm, oblicz:

a) długość krawędzi bocznych,

b) pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

5.101. Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt, którego boki pozostają w stosunku 39 : 25. Wysokości różnych ścian bocznych poprowadzone na krawędzie podstawy ostrosłupa są równe: 60 cm i 52 cm. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

5.102. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku długości 1 dm, a spodkiem wysokości ostrosłupa jest jeden z wierzchołków tego kwadratu. Dwie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz:

a) długość krawędzi bocznych ostrosłupa,

b) pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

5.103. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość 30 cm i 40 cm. Spodek wysokości ostrosłupa jest wierzchołkiem kąta prostego trójkąta w podstawie. Ściana boczna o największym polu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym α takim, że $\operatorname{tg}\alpha = 1\frac{1}{3}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów

5.104. Akwarium do hodowli rybek ma następujące wymiary: długość 0,8 m, szerokość 0,4 m i wysokość 0,5 m. Oblicz, ile co najwyżej litrów wody należy wlać do tego akwarium, aby poziom lustra wody znajdował się w odległości nie mniejszej niż 10 cm od górnej krawędzi akwarium.

5.105. Jeżeli każdą krawędź danego sześcianu przedłużymy o 2 cm, to jego objętość powiększy się o 98 cm^3. Oblicz długość krawędzi danego sześcianu.

5.106. W prostopadłościanie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ podstawa $ABCD$ jest kwadratem. Wysokość C_1E trójkąta BC_1D_1 dzieli przekątną D_1B na odcinki długości: $|D_1E| = 2$ dm, $|EB| = 8$ dm. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

5.107. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego przekątna ma długość 14 cm, jeśli:

a) kąt nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy jest równy 60°,

b) kąt między tą przekątną a przekątną ściany bocznej, wychodzącymi z tego samego wierzchołka, jest równy 30°.

5.108. Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 6 dm^3, a przekątna ściany bocznej tworzy z krawędzią podstawy kąt 60°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

5.109. Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6 cm i jest nachylona do sąsiedniej ściany bocznej pod kątem 30°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

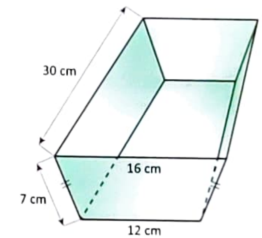
5.110. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym dłuższa przekątna ma długość $\sqrt{5}$ dm, a krótsza przekątna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość tego graniastosłupa.

5.111. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, którego kąt ostry ma miarę 30°. Wszystkie krawędzie graniastosłupa mają jednakową długość. Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe 180 cm^2, oblicz objętość tego graniastosłupa.

5.112. Blaszana forma do pieczenia ciasta ma kształt graniastosłupa prostego. Uwzględniając wymiary podane na rysunku obok, oblicz:

a) ile cm^2 blachy potrzeba na wykonanie tej formy; wynik podaj z dokładnością do 1 cm^2,

b) pojemność formy. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 litra.



5.113. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez, którego podstawy mają długość 3 cm i 24 cm, a ramiona – 10 cm i 17 cm. Ściana boczna o najmniejszym polu powierzchni jest kwadratem. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

5.114. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, którego boki mają długość 10 cm i 18 cm. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa mają jednakową długość, równą $5\sqrt{10}$ cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.115. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 15 cm. Ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.116. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi jest równy $90°$. Wiedząc, że krawędzie boczne mają długość 12 cm, oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.117. Podstawą ostrosłupa jest romb, a spodkiem wysokości tego ostrosłupa jest punkt przecięcia się przekątnych rombu. Dwie krawędzie boczne ostrosłupa mają długość 15 cm, a pozostałe dwie – 13 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa, wiedząc, że jego wysokość jest równa 12 cm.

5.118. Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego wynosi $16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Oblicz objętość tego czworościanu.

5.119. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego tangens jest równy $1\frac{1}{3}$. Wiedząc, że objętość ostrosłupa wynosi $6\ \text{dm}^3$, oblicz:

a) wysokość ostrosłupa,

b) pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

5.120. Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $36\sqrt{2}\ \text{cm}^3$. Wszystkie krawędzie tego ostrosłupa mają jednakową długość. Oblicz:

a) długość tych krawędzi,

b) pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

5.121. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Wiedząc, że objętość tego ostrosłupa jest równa $\frac{16\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$, oblicz wysokość ostrosłupa i długość jego krawędzi.

5.122. Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi $\frac{4\sqrt{2}}{3}\ \text{dm}^3$. Kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy $45°$. Wyznacz odległość spodka wysokości:

a) od krawędzi bocznej

b) od ściany bocznej ostrosłupa.

5.123. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 4 dm, a kąt między ścianą boczną i płaszczyzną podstawy jest równy $45°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.124. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest ośmiokąt. Oblicz objętość tego ostrosłupa, wiedząc, że jego krawędź boczna ma długość 10 cm, a kąt między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy jest równy $30°$.

5.125. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego dwa boki mają długość 6 cm, a długość trzeciego boku wynosi 8 cm. Wszystkie krawędzie boczne mają jednakową długość, równą 9 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.126. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego dwa boki mają długość 39 cm, a długość trzeciego boku wynosi 30 cm. Każda ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $45°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.127. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat, a spodek wysokości ostrosłupa jest jednym z wierzchołków tego kwadratu. Suma pól powierzchni dwóch ścian bocznych o większym polu powierzchni jest dwa razy większa od sumy powierzchni pozostałych ścian bocznych. Wiedząc, że objętość tego ostrosłupa jest równa $81\sqrt{3}\ \text{cm}^3$, oblicz:

a) długość krawędzi podstawy,

b) długość najdłuższej krawędzi tego ostrosłupa.

5.128. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, którego pole jest równe $1\ \text{m}^2$. Dwie ściany boczne tego ostrosłupa są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, a dwie pozostałe tworzą z nią kąty odpowiednio równe $30°$ i $60°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.129. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny ABC. Krawędź boczna CS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy ostrosłupa. Kąt nachylenia ściany ABS do płaszczyzny podstawy ma $60°$. Wiedząc, że objętość ostrosłupa jest równa $\sqrt{3}$, oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

5.130. Podstawą prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest prostokąt. którego boki AB i BC są różnej długości. Objętość ostrosłupa $ACDD_1$ jest równa $12\ \text{cm}^3$.

a) Oblicz objętość prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

b) Wiedząc dodatkowo, że $|AB| : |BC| : |DD_1| = 3 : 4 : 6$, oblicz cosinus kąta między krawędziami AD_1 i CD_1 ostrosłupa $ACDD_1$.

Przekroje wielościanów – zadania

5.131. Przekrój sześcianu płaszczyzną, zawierającą przekątne trzech różnych ścian, jest trójkątem, którego pole wynosi $50\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Oblicz objętość tego sześcianu.

5.132. Pole powierzchni całkowitej sześcianu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest równe $600\ \text{cm}^2$. Oblicz pole przekroju tego sześcianu płaszczyzną, zawierającą krawędzie AD i B_1C_1.

5.133. Krawędź boczna prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ma długość 56 cm. Boki podstawy mają długość: $|AB| = 33$ cm, $|AD| = 40$ cm. Oblicz pole przekroju płaszczyzną wyznaczoną przez krawędzie AD i B_1C_1.

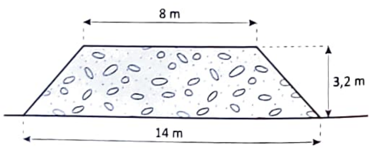
5.134. Długości boków prostopadłościanu pozostają w stosunku $3 : 4 : 5$. Przez najdłuższą krawędź i przekątną najmniejszej ściany poprowadzono przekrój, którego pole jest równe $100\ \text{cm}^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.

5.135. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDA_1B_1C_1D_1$ krawędź podstawy $ABCD$ jest o 2 cm dłuższa od krawędzi bocznej AA_1. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $320\ \text{cm}^2$. Oblicz pole przekroju tej bryły wyznaczonego przez przekątną podstawy DB i wierzchołek C_1.

5.136. Krawędzie podstawy graniastosłupa prostego trójkątnego mają długość: 10 cm, 17 cm, 21 cm. Wysokość graniastosłupa jest równa 20 cm. Graniastosłup przecięto płaszczyzną, zawierającą najkrótszą wysokość podstawy i krawędź boczną, która ma punkt wspólny z tą wysokością. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

5.137. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny prostokątny. Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa jest równa $\left(28+8\sqrt{2}\right)$ cm. Dwie przystające ściany boczne są kwadratami. Oblicz pole przekroju, wyznaczonego przez przekątne tych kwadratów wychodzące z jednego wierzchołka.

5.138. Rysunek obok przedstawia przekrój nasypu kolejowego. Oblicz, ile m^3 ziemi wykorzystano do utworzenia nasypu o długości 1 km.



5.139. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny, którego wysokość jest równa 5 cm, a odcinek łączący środki ramion ma długość 12 cm. Przekrój graniastosłupa płaszczyzną, zawierającą krawędź boczną i przekątną podstawy, ma pole równe $130\ \text{cm}^2$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

5.140. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 6 cm, a krawędź boczna – 5 cm. Oblicz długość boków przekroju ostrosłupa wyznaczonego przez:

a) wysokości przeciwległych ścian bocznych, poprowadzone ze wspólnego wierzchołka

b) przeciwległe krawędzie boczne.

5.141. Długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 10 cm. Przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną, przechodzącą przez wysokości przeciwległych ścian bocznych, jest trójkątem równobocznym. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

5.142. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przekrój wyznaczony przez przekątną podstawy i wierzchołek ostrosłupa jest trójkątem prostokątnym. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi 128 cm. Oblicz:

a) długość każdej krawędzi ostrosłupa,

b) pole danego przekroju.

5.143. Krawędź podstawy czworościanu foremnego ma długość 4 dm. Oblicz pole przekroju płaszczyzną, wyznaczoną przez krawędź boczną i wysokość podstawy tego czworościanu.

5.144. Sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$ o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkty A_1, B, C_1. Oblicz odległość punktu B_1 od otrzymanego przekroju.

5.145. Krawędź boczna prawidłowego ostrosłupa sześciokątnego ma długość 8 cm, a długość krawędzi podstawy jest równa 4 cm. Przez środki dwóch sąsiednich boków sześciokąta poprowadzono płaszczyznę równoległą do wysokości ostrosłupa. Oblicz pole otrzymanego przekroju tego ostrosłupa.

Test sprawdzający do rozdziału 5.

1. Krawędź pierwszego sześcianu jest dwa razy dłuższa od krawędzi drugiego sześcianu. Ile razy objętość pierwszego sześcianu jest większa od objętości drugiego sześcianu?

A. 2 razy B. 4 razy C. 6 razy D. 8 razy

2. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna ma długość 10 cm, a krawędź podstawy – $3\sqrt{2}$ cm. Wysokość tego graniastosłupa jest równa:

A. 4 cm B. 6 cm C. $6\sqrt{2}$ cm D. 8 cm

3. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o wymiarach 6 cm na 8 cm. Jeśli wysokość prostopadłościanu jest równa 24 cm, to tangens kąta nachylenia przekątnej prostopadłościanu do płaszczyzny podstawy wynosi:

A. $\frac{12}{5}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{12}{13}$

4. Wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego i wysokość jego podstawy są równe i wynoszą $\sqrt{3}$ cm. Pole powierzchni całkowitej tej bryły jest równe:

A. $5\sqrt{3}$ cm^2 B. $6\sqrt{3}$ cm^2 C. $7\sqrt{3}$ cm^2 D. $8\sqrt{3}$ cm^2

5. Przekątne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mają długość 15 cm i 17 cm. Wysokość tego graniastosłupa jest równa:

A. 8 cm B. $\sqrt{33}$ cm C. 15 cm D. $\sqrt{43}$ cm

6. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt prostokątny. Wówczas spodkiem wysokości tego ostrosłupa jest:

A. punkt przecięcia się środkowych trójkąta w podstawie
B. wierzchołek kąta prostego trójkąta w podstawie
C. środek przeciwprostokątnej trójkąta w podstawie
D. środek okręgu wpisanego w podstawę tego ostrosłupa

7. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Niech α oznacza kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy. Wówczas:

A. $\alpha \in (30°, 45°)$ B. $\alpha = 45°$ C. $\alpha \in (45°, 60°)$ D. $\alpha = 60°$

8. Kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego do płaszczyzny podstawy jest równy 60°. Przekrój ostrosłupa płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny podstawy i zawierającą jedną z krawędzi bocznych jest trójkątem, którego pole wynosi $24\sqrt{3}$ cm^2. Wysokość trójkąta w podstawie ostrosłupa jest równa:

A. $12\sqrt{3}$ cm B. 12 cm C. $8\sqrt{3}$ cm D. 8 cm

9. Pewien ostrosłup ma 6 krawędzi. Trzy spośród tych krawędzi wychodzą z jednego wierzchołka, są do siebie parami prostopadłe i mają odpowiednio długość 3 cm, 4 cm, 5 cm. Objętość tego ostrosłupa wynosi:

A. $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ cm^3 B. $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ cm^3 C. 60 cm^3 D. 10 cm^3

10. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny, którego bok ma długość 12 cm. Spodek wysokości ostrosłupa znajduje się w jednym z wierzchołków podstawy. Ściana boczna ostrosłupa, o największym polu powierzchni, jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Wysokość tego ostrosłupa jest równa:

A. 6 cm B. 8 cm C. 18 cm D. 16 cm

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

11. Odcinek AB jest równoległy do płaszczyzny π i ma długość 21 cm. Prosta k przecina odcinek AB, jest prostopadła do płaszczyzny π i przebija tę płaszczyznę w punkcie M. Odległości punktu M od punktów A, B wynoszą odpowiednio 10 cm i 17 cm. Oblicz odległość odcinka AB od płaszczyzny π.

D **12.** W sześcianie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ punkt P jest środkiem krawędzi B_1C_1, a punkt Q – środkiem krawędzi BB_1. Wykaż, że czworokąt $AQPD_1$ jest trapezem równoramiennym.

13. Jeżeli każdą krawędź sześcianu przedłużymy o 1 dm, to jego objętość powiększy się 125 razy. Oblicz długość krawędzi mniejszego sześcianu.

14. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $\sqrt{136}$ cm, a cosinus kąta nachylenia tej przekątnej do ściany bocznej jest równy $\frac{5}{\sqrt{34}}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

15. Objętość prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest równa 144 cm^3. Pole prostokąta $ABCD$ jest równe 12 cm^2, a pole przekroju płaszczyzną (ABC_1D_1) wynosi $12\sqrt{10}$ cm^2. Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu.

D **16.** Graniastosłup prawidłowy trójkątny przecięto płaszczyzną, zawierającą krawędź boczną oraz wysokość podstawy, mającą z tą krawędzią punkt wspólny. Wykaż, że jeśli pole otrzymanego przekroju jest równe polu jednej z podstaw, to krawędź podstawy tego graniastosłupa jest dwa razy dłuższa od krawędzi bocznej.

17. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym sinus kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej jest równy $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. Oblicz stosunek wysokości graniastosłupa do długości krawędzi podstawy.

18. Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest trapez prostokątny $ABCD$. Wysokość AD tego trapezu jest równa 4 cm, a długości jego podstaw wynoszą: $|AB| = 6$ cm, $|DC| = 3$ cm. Wiedząc, że wysokość graniastosłupa jest równa 12 cm, oblicz:
a) długości dwóch różnych przekątnych graniastosłupa,
b) cosinus kąta dwuściennego między płaszczyznami (ABC_1D_1) i $(ABCD)$.

19. Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 192 cm^3. Pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną, zawierającą dwie przeciwległe krawędzie boczne, wynosi 48 cm^2. Oblicz:
a) długość krawędzi tego ostrosłupa,
b) cosinus kąta między dwiema przeciwległymi krawędziami bocznymi.

20. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 5 dm. Pole przekroju ostrosłupa płaszczyzną, zawierającą krawędź boczną i wysokość ostrosłupa, jest równe 45 dm^2. Oblicz:
a) sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy,
b) tangens kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,
c) pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

21. Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt, którego przekątne mają długość 16 cm i przecinają się pod kątem 30°. Objętość ostrosłupa wynosi 320 cm^3. Oblicz:
a) wysokość ostrosłupa,
b) sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy,
c) odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznej.

22. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego boki mają długość 13 cm, 14 cm, 15 cm. Wszystkie krawędzie boczne mają taką samą długość, równą $21\frac{1}{8}$ cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

23. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego boki mają długość: 15 cm, 20 cm, 25 cm. Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

24. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt prostokątny równoramienny, którego dwa boki mają długość 10. Cosinus kąta nachylenia dwóch ścian bocznych tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{5}{13}$. Oblicz:
a) pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa,
b) tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

25. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym przyprostokątne mają długość: $|AC| = 10$ cm, $|BC| = 24$ cm. Spodkiem wysokości ostrosłupa jest wierzchołek C. Wiedząc, że wysokość tego ostrosłupa jest równa 24 cm, oblicz:
a) długość boków trójkąta ABS,
b) tangens kąta dwuściennego między płaszczyzną (ABS) i płaszczyzną podstawy.

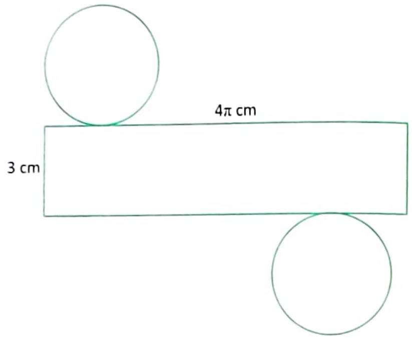
6. Geometria przestrzenna. Bryły obrotowe

Walec

6.1. Siatka walca składa się z prostokąta. Na podstawie siatki walca przedstawionej obok, podaj:

a) wysokość walca i promień podstawy walca,

b) pole powierzchni całkowitej walca.



6.2. Przekrój osiowy walca jest kwadratem, którego bok ma długość 4 cm.

a) Podaj promień i wysokość walca.

b) Narysuj siatkę tego walca w rzeczywistej wielkości.

6.3. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o wymiarach 3 cm na 5 cm. Narysuj siatkę tego walca. Rozważ dwa przypadki.

6.4. Boki prostokąta mają długość 4 cm i 6 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca, otrzymanego w wyniku obrotu tego prostokąta wokół:

a) dłuższego boku b) krótszego boku.

6.5. Podstawa walca ma średnicę 1 dm. Wysokość jest równa obwodowi podstawy. Oblicz pole powierzchni bocznej walca.

6.6. Pole powierzchni bocznej walca jest pięć razy większe od sumy pól obu podstaw. Oblicz stosunek wysokości walca do promienia podstawy.

6.7. Prostokąt o obwodzie 14 dm obracamy wokół jednego z jego boków. Pole powierzchni całkowitej otrzymanego walca wynosi 28π dm^2. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca.

6.8. Długości boków prostokąta pozostają w stosunku 1 : 2. W wyniku obrotu tego prostokąta wokół dwóch różnych jego osi symetrii powstają dwa walce. Oblicz stosunek pól powierzchni całkowitych tych walców.

6.9. Stosunek pola przekroju osiowego do pola podstawy walca wynosi $4 : \pi$. Oblicz miarę kąta między przekątnymi przekroju osiowego walca.

6.10. Powierzchnia boczna walca jest prostokątem, którego jeden bok przystający do wysokości walca ma długość 20. Przekątna tego prostokąta tworzy z drugim bokiem kąt równy 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

6.11. Wysokość walca jest równa 8 cm. Oblicz objętość tego walca, jeśli:

a) średnica podstawy jest równa 24 cm,

b) przekątna przekroju osiowego ma długość 17 cm,

c) kąt nachylenia przekątnej przekroju osiowego do płaszczyzny podstawy jest równy 60°.

6.12. Oblicz objętość walca, którego pole powierzchni całkowitej jest równe 702π cm^2, a obwód przekroju osiowego wynosi 80 cm.

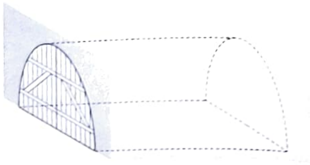
6.13. Przekątna prostokąta ma długość 30 cm. Pole tego prostokąta jest równe 432 cm^2. Oblicz objętość walca otrzymanego przez obrót tego prostokąta dookoła dłuższego boku.

6.14. Pole prostokąta jest równe 3 dm^2, a jego przekątne przecinają się pod kątem 60°. Oblicz objętość walca, powstałego w wyniku obrotu tego prostokąta wokół krótszego boku.

6.15. Prostokątny kawałek blachy o wymiarach 1,6 m długości i 0,8 m szerokości można zwinąć w rurkę na dwa sposoby. W pierwszym przypadku długość rurki będzie wynosić 1,6 m, zaś w drugim – 0,8 m. Oblicz stosunek objętości tych rurek.

6.16. Obwód podstawy blaszanej beczki w kształcie walca wynosi 157 cm. Wysokość beczki jest równa 1,1 m. W beczce zebrano 157 litrów deszczówki. Oblicz odległość lustra wody od brzegu beczki. Wynik podaj z dokładnością do 1 cm.

6.17. Piwnica ma kształt połowy walca o długości 6 m i średnicy 5 m (zobacz rysunek obok). Oblicz kubaturę piwnicy oraz jej pole powierzchni całkowitej (sklepienie wraz z podłogą i pionową ścianą na końcu piwnicy). Wyniki zaokrąglij do całości.



6.18. Jeżeli zwiększymy wysokość pewnego walca o 4 cm, to jego objętość wzrośnie o 196π cm^3. Oblicz promień podstawy walca.

6.19. Pole powierzchni bocznej walca wynosi $36\sqrt{3}\pi$ cm^2. Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz:

a) promień podstawy i wysokość walca,

b) objętość tego walca.

6.20. Podstawa walca ma obwód równy 6π cm. Powierzchnia boczna walca jest prostokątem, którego przekątna tworzy z bokiem przystającym do wysokości walca kąt równy:

a) 30° b) 45° c) 60°.

Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca.

6.21. Objętość walca wynosi $\frac{54}{\pi}$ cm^3. Oblicz pole powierzchni bocznej tego walca, wiedząc, że po rozwinięciu na płaszczyznę jest ona kwadratem.

6.22. Wysokość walca jest o 7 cm dłuższa od promienia. Wiedząc, że pole powierzchni bocznej walca wynosi 120π cm^2, oblicz objętość tego walca.

D **6.23.** Pole podstawy walca jest równe P, a pole jego przekroju osiowego wynosi S. Wykaż, że pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe $2P + \pi S$.

Stożek

6.24. Dany jest promień podstawy r i długość tworzącej l stożka. Wyznacz kąt środkowy wycinka koła, będącego powierzchnią boczną stożka.

a) $r = 1$ dm, $l = 4$ dm b) $r = 3$ cm, $l = 15$ cm

6.25. Narysuj siatkę stożka o promieniu r i tworzącej długości l, jeśli:

a) $r = 3$ cm, $l = 4{,}5$ cm b) $r = 2$ cm, $l = 4$ cm.

6.26. Wysokość stożka jest równa h, a promień podstawy stożka wynosi r. Wyznacz kąt środkowy wycinka koła, tworzącego powierzchnię boczną stożka, jeśli:

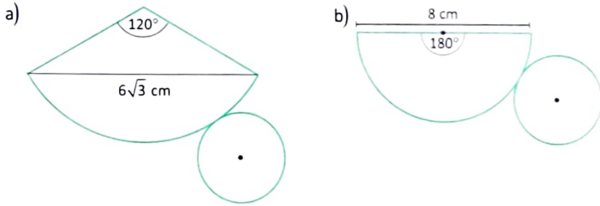
a) $h = 4$ cm, $r = 3$ cm b) $h = 4\sqrt{5}$ cm, $r = 1$ cm.

6.27. Narysuj przykładową siatkę stożka o promieniu r i wysokości h, jeśli:

a) $r = 3$ cm, $h = \sqrt{55}$ cm b) $h = r\sqrt{3}$.

6.28. Promień wycinka kołowego o kącie 120° jest równy 3 m. Wycinek zwinięto i otrzymano powierzchnię boczną pewnego stożka. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka.

6.29. Rysunek poniżej przedstawia siatkę pewnego stożka. Na podstawie danych na rysunku wyznacz promień i wysokość tego stożka.



6.30. Tworząca stożka ma długość 20 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka, jeśli:

a) tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°,

b) wysokość stożka jest równa 16 cm.

6.31. Pole powierzchni bocznej stożka wynosi 50π cm^2. Tworząca stożka tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Oblicz wysokość tego stożka.

6.32. Tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy jest równy 0,75. Wiedząc, że pole powierzchni bocznej stożka jest równe $80\pi\ cm^2$, oblicz długość tworzącej stożka.

6.33. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość 6 dm i 8 dm. Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły, otrzymanej w wyniku obrotu tego trójkąta wokół:
a) krótszej przyprostokątnej b) dłuższej przyprostokątnej.

6.34. Stosunek długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego wynosi 4 : 3, a przeciwprostokątna ma długość 25 cm. Oblicz objętość bryły, którą otrzymamy, obracając ten trójkąt wokół:
a) krótszej przyprostokątnej b) dłuższej przyprostokątnej.

6.35. Oblicz pole powierzchni całkowitej P i objętość V stożka, którego tworząca ma długość l, promień podstawy r i wysokość h, jeśli:
a) $r = 5$ oraz $h = l - 1$ b) $h = r + 7$ oraz $l = h + 2$.

6.36. Średnica okręgu jest równa 29 cm. Przez jeden z jej końców poprowadzono cięciwę długości 20 cm. Cięciwa ta obraca się wokół danej średnicy. Oblicz pole powierzchni całkowitej otrzymanej bryły.

6.37. Kąt rozwarcia stożka jest równy 120°. Wiedząc, że pole przekroju osiowego wynosi $9\sqrt{3}\ cm^2$, oblicz objętość V i pole powierzchni całkowitej P tego stożka.

6.38. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym, którego pole wynosi $18\ cm^2$. Oblicz objętość V i pole powierzchni całkowitej P tego stożka.

6.39. Tworząca stożka tworzy z płaszczyzną podstawy kąt, którego sinus jest równy 0,96. Objętość stożka wynosi $392\pi\ cm^3$. Oblicz:
a) promień podstawy i wysokość stożka,
b) pole powierzchni bocznej stożka.

6.40. Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe $96\pi\ cm^2$, a tworząca ma długość 10 cm. Oblicz objętość tego stożka.

6.41. Oblicz objętość stożka, którego pole powierzchni bocznej wynosi $65\pi\ cm^2$, a wysokość jest równa 12 cm.

D 6.42. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym. Wykaż, że pole powierzchni bocznej tego stożka jest dwa razy większe od pola podstawy.

D 6.43. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki, których długości pozostają w stosunku 1 : 3. Wykaż, że stosunek objętości brył powstałych w wyniku obrotu tego trójkąta wokół dłuższej i krótszej przyprostokątnej jest równy $1:\sqrt{3}$.

Kula i sfera

6.44. Oblicz pole powierzchni i objętość kuli o promieniu r, jeśli:
a) $r = 6$ cm b) $r = 15$ cm.

6.45. Korzystając z kalkulatora wyznacz w przybliżeniu promień kuli, której
a) pole powierzchni jest równe $1\ m^2$ b) objętość wynosi 1 litr.

6.46. Półkole ma pole równe P. Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły, powstałej w wyniku obrotu tego półkola wokół:
a) jego średnicy b) jego osi symetrii.

6.47. Pięć kulek ołowianych o promieniu 3 cm i n kulek ołowianych o promieniu 2 cm przetopiono i uformowano jedną kulę. Wiedząc, że pole powierzchni uzyskanej kuli jest równe $196\pi\ cm^2$, oblicz n.

6.48. Stosunek pól powierzchni dwóch kul jest równy 9, a różnica promieni tych kul wynosi 10 cm. Oblicz te promienie.

6.49. Pola powierzchni dwóch kul różnią się o $644\pi\ cm^2$, a promień jednej z tych kul jest dłuższy od promienia drugiej kuli o 7 cm. Oblicz pola powierzchni obu kul.

6.50. Objętość kuli K_1 jest 27 razy większa od objętości kuli K_2. Oblicz:
a) stosunek promieni obu kul b) stosunek pól powierzchni tych kul.

6.51. Objętości dwóch kul różnią się o $876\pi\ cm^3$, a promienie tych kul różnią się o 3 cm. Wyznacz:
a) promienie tych kul, b) różnicę pól powierzchni obu kul.

6.52. Promień kuli ziemskiej jest w przybliżeniu równy 6300 km. Oblicz długość równoleżnika, odpowiadającego szerokości geograficznej:
a) 30° b) 45°.
Wynik podaj z dokładnością do 100 km.

6.53. Pewne miasto leży na równoleżniku 60° szerokości geograficznej północnej. Jaką drogę zakreśla to miasto w ciągu jednej godziny, na skutek obrotu Ziemi dookoła własnej osi? Zakładamy, że Ziemia wykonuje pełny obrót w ciągu 24 godzin.

6.54. Punkty A i B należą do sfery kuli o środku S. Kąt zawarty między odcinkami AB i BS jest równy 45°, a odcinek AB ma długość $6\sqrt{2}$ cm. Oblicz objętość i pole powierzchni tej kuli.

6.55. Kulę o promieniu 41 cm przecięto płaszczyzną w odległości 9 cm od środka kuli. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

6.56. Przekrój kuli płaszczyzną, równoległą do płaszczyzny koła wielkiego kuli, jest kołem, którego pole jest o $12{,}25\pi$ dm^2 mniejsze od pola koła wielkiego. Oblicz odległość między płaszczyznami obu kół.

Bryły obrotowe – zadania różne

6.57. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość 6 dm i 8 dm. Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły, otrzymanej w wyniku obrotu tego trójkąta wokół przeciwprostokątnej.

6.58. Stosunek długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego wynosi 4 : 3, a przeciwprostokątna ma długość 25 cm. Oblicz objętość bryły, utworzonej w wyniku obrotu tego trójkąta wokół przeciwprostokątnej.

6.59. Boki równoległoboku mają długość 6 cm i 4 cm, a kąt ostry tego równoległoboku jest równy 60°. Oblicz objętość V i pole powierzchni całkowitej P_c bryły, otrzymanej w wyniku obrotu tego równoległoboku wokół dłuższego boku.

6.60. Kąt ostry trapezu prostokątnego jest równy 45°. Podstawy trapezu mają długość 15 i 9. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły, utworzonej w wyniku obrotu tego trapezu wokół:

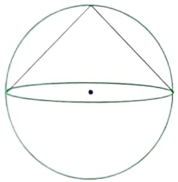
a) krótszej podstawy b) najkrótszego boku.

D **6.61.** Kwadrat obracamy raz wokół osi symetrii, przechodzącej przez środki dwóch przeciwległych boków i drugi raz wokół osi symetrii, zawierającej przekątną kwadratu. Wykaż, że stosunek objętości pierwszej z otrzymanych brył do objętości drugiej jest równy $3:2\sqrt{2}$.

D **6.62.** Kąt ostry rombu jest równy 30°. Wykaż, że objętość bryły, powstałej z obrotu tego rombu wokół jego boku, jest cztery razy mniejsza od objętości bryły, którą otrzymamy, obracając kwadrat o takim samym boku wokół boku.

6.63. W stożek, którego kąt rozwarcia jest równy 90°, wpisano kulę. Wyznacz objętość kuli, wiedząc, że tworząca stożka ma długość $2+\sqrt{2}$.

6.64. W kulę wpisano stożek w taki sposób, że podstawa stożka jest jednocześnie kołem wielkim kuli, jak na rysunku obok. Wyznacz stosunek objętości stożka do objętości kuli.



6.65. W kulę wpisano sześcian w taki sposób, że wszystkie wierzchołki sześcianu należą do sfery tej kuli. Oblicz stosunek objętości kuli do objętości sześcianu.

6.66. Kąt rozwarcia stożka jest równy 60°. Stożek wpisano w kulę o objętości równej 288π cm^3. Oblicz objętość stożka.

Podobieństwo figur w przestrzeni

6.67. Pole powierzchni całkowitej pierwszego sześcianu jest równe $37{,}5$ cm^2. Objętość drugiego sześcianu wynosi 216 cm^3. Oblicz skalę podobieństwa pierwszego sześcianu do drugiego sześcianu.

6.68. Pole powierzchni pierwszej kuli jest 16 razy większe od pola powierzchni drugiej kuli.

a) Podaj skalę podobieństwa pierwszej kuli do drugiej kuli.

b) Ile razy objętość pierwszej kuli jest większa od objętości drugiej kuli?

6.69. Ostrosłup podzielono na dwie bryły płaszczyzną, równoległą do podstawy i przechodzącą przez środek wysokości ostrosłupa. Oblicz:

a) stosunek pola przekroju do pola podstawy danego ostrosłupa,

b) stosunek objętości otrzymanych brył.

6.70. Pole podstawy ostrosłupa jest równe 150 cm^2. Pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną równoległą do podstawy wynosi 54 cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa, wiedząc, że odległość między płaszczyzną przekroju i podstawą ostrosłupa jest równa 14 cm.

6.71. Wysokość ostrosłupa jest równa 21 cm, a pole podstawy wynosi 1350 cm^2.

a) W jakiej odległości od podstawy znajduje się płaszczyzna przekroju, równoległa do płaszczyzny podstawy, jeśli pole tego przekroju jest równe 150 cm^2?

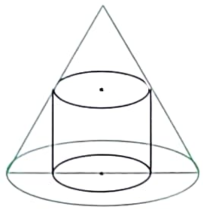
b) Oblicz objętość ostrosłupa odciętego tą płaszczyzną przekroju.

6.72. Wysokość stożka podzielono na cztery równe części. Przez te punkty podziału poprowadzono trzy płaszczyzny, równoległe do podstawy, które podzieliły stożek na cztery różne bryły. Wiedząc, że najmniejsza z tych brył ma objętość równą 1 litr, oblicz objętości pozostałych trzech brył.

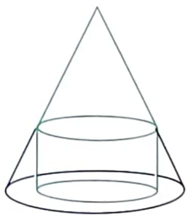
6.73. Pole przekroju płaszczyzną, równoległą do płaszczyzny podstawy stożka, jest o 36% mniejsze od pola powierzchni podstawy. W jakim stosunku ten przekrój dzieli objętość stożka?

6.74. Różnica promieni dwóch kul jest równa 6 cm, a różnica objętości tych kul wynosi 1248π cm^3. Wyznacz promienie tych kul. Jaka jest skala podobieństwa większej kuli do mniejszej?

6.75. W stożek wpisano walec w taki sposób, że jedna podstawa walca zawiera się w podstawie stożka, a okrąg drugiej podstawy walca zawiera się w powierzchni bocznej stożka – jak na rysunku obok. Jaką część objętości stożka stanowi objętość walca, jeśli promień podstawy stożka jest dwukrotnością promienia podstawy walca?



6.76. Z kawałka drewna w kształcie stożka wytoczono na tokarce bryłę, składającą się z walca i małego stożka o takiej samej podstawie. Kąt rozwarcia małego stożka jest taki sam, jak kąt rozwarcia początkowego stożka, zobacz rysunek obok. Wysokość otrzymanej bryły jest równa wysokości początkowego stożka, a stosunek promienia podstawy tego stożka do promienia podstawy walca wynosi 3 : 2. Oblicz, jaką część objętości początkowego stożka stanowią ścinki drewna.



Test sprawdzający do rozdziału 6.

1. Pole powierzchni bocznej walca o promieniu podstawy 5 cm i wysokości 8 cm, jest równe:

A. 40 cm^2 B. 130π cm^2 C. 40π cm^2 D. 80π cm^2

2. Pole podstawy walca jest równe 9π dm^2, a pole przekroju osiowego wynosi 24 dm^2. Zatem objętość walca wynosi:

A. 36π dm^3 B. 32π dm^3 C. 30π dm^3 D. 24π dm^3

3. Wysokości dwóch walców są równe. Wiadomo, że drugi walec ma 4 razy większą objętość od pierwszego walca. Wówczas promień podstawy drugiego walca jest większy od promienia podstawy pierwszego walca:

A. dwukrotnie B. czterokrotnie C. ośmiokrotnie D. szesnastokrotnie

4. Kąt rozwarcia stożka jest równy 30°, a pole przekroju osiowego wynosi 4 dm^2. Tworząca stożka ma długość:

A. 2 dm B. 4 dm C. $2\sqrt[4]{3}$ dm D. $2\sqrt{3}$ dm

5. Stożek o objętości 800π ma wysokość równą 24. Tworząca stożka ma długość:

A. 10 B. 25 C. 26 D. 30

6. Tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy jest równy $1\frac{1}{3}$.

Niech P_b oznacza pole powierzchni bocznej, zaś P_c – pole powierzchni całkowitej tego stożka. Wówczas:

A. $P_c = 2P_b$ B. $P_c = 1{,}5P_b$ C. $P_c = \frac{4}{3}P_b$ D. $P_c = 1{,}6P_b$

7. Wysokość stożka jest równa $\sqrt{44}$, a promień podstawy – 10. Zatem kąt środkowy wycinka koła, tworzącego powierzchnię boczną stożka, ma miarę:

A. 180° B. 210° C. 240° D. 300°

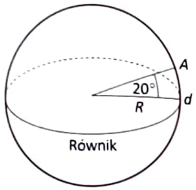
8. Dwa stożki są podobne. Pierwszy stożek ma objętość 27 razy większą od objętości drugiego stożka. Ile razy pole przekroju osiowego pierwszego stożka jest większe od pola przekroju osiowego drugiego stożka?

A. 3 razy B. 9 razy C. 27 razy D. 54 razy

9. Gdyby promień danej sfery był o 1 m dłuższy, to powierzchnia sfery byłaby większa o 20π m^2. Zatem promień danej sfery jest równy:

A. 1 m B. 2 m C. 3 m D. 4 m

10. Miasto A leży na równoleżniku 20° szerokości geograficznej północnej Jeżeli przyjmiemy, że Ziemia jest kulą o promieniu R, gdzie $R = 6300$ km oraz $\pi \approx 3$, to odległość d miasta A od równika (zobacz rysunek obok) jest w przybliżeniu równa:



A. 1050 km B. 2100 km

C. 3150 km D. 4200 km

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

11. Naczynie w kształcie walca o średnicy podstawy 6 cm napełniono częściowo wodą. Następnie do tej wody wrzucono metalową kulkę, która zanurzyła się całkowicie, podnosząc poziom wody w walcu o 0,5 cm. Wyznacz promień metalowej kulki.

12. Objętość walca jest równa 5π dm^2, a pole jego powierzchni całkowitej wynosi 13π dm^2. Wyznacz promień podstawy tego walca.

13. Pole powierzchni bocznej walca jest równe 10π dm^2. Promień podstawy walca jest o 4 dm dłuższy od jego wysokości. Oblicz objętość tego walca.

14. Wysokość walca jest równa 6 dm. Kąt między przekątnymi przekroju osiowego jest równy 60°. Oblicz objtość tego walca. Rozważ dwa przypadki.

15. Wysokość walca jest równa 16 cm, a promień podstawy 25 cm. Oblicz pole przekroju walca płaszczyzną równoległą do osi obrotu walca, poprowadzoną w odległości 24 cm od tej osi.

16. Tworząca stożka jest cztery razy dłuższa od promienia jego podstawy. Oblicz:

a) miarę kąta wycinka koła, tworzącego powierzchnię boczną stożka,

b) tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy,

c) sinus kąta rozwarcia stożka, wykorzystując wzór: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

17. Powierzchnia boczna stożka jest wycinkiem koła o promieniu 12 cm, a kąt środkowy tego wycinka wynosi 270°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

18. Stożek przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy i dzielącą wysokość stożka w stosunku 1 : 2 – licząc od podstawy stożka. Oblicz stosunek objętości otrzymanych brył.

19. Sinus jednego z kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest równy 0,96. Trójkąt obracamy wokół krótszej przyprostokątnej. Wiedząc, że objętość otrzymanej bryły wynosi 1344π cm^3, oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły.

20. Różnica długości boków równoległoboku jest równa 7 cm, a kąt ostry równoległoboku ma miarę 30°. Równoległobok obracamy wokół dłuższego boku. Oblicz objętość otrzymanej bryły, wiedząc, że jej pole powierzchni całkowitej wynosi 184π cm^2.

Odpowiedzi do zadań

1. Funkcja wykładnicza

Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie

1.1. a) $-3\frac{3}{8}$ b) -16 c) $1\frac{7}{9}$ d) $2\frac{2}{5}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{32}$ f) $1+\frac{2}{3}\sqrt{2}$

1.2. a) 1,1 b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{8}{27}$ d) $1\frac{1}{5}$ e) $1\frac{1}{4}$ f) $2\sqrt[3]{2}$

1.3. a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 27 d) 16 e) 5 f) 3

1.4. a) $2^{\frac{17}{6}}$ b) $5^{\frac{13}{4}}$ c) $6^{\frac{17}{5}}$ d) $3^{-\frac{19}{6}}$ e) $2^{\frac{1}{4}}$ f) $10^{-\frac{12}{5}}$

1.5. a) 2 b) 4 c) $10\frac{1}{2}$ d) 125

1.6. a) 2 b) 2 c) 5 d) $7-4\sqrt{3}$

1.9. a) 464,15888 b) 0,00046 c) 46,41589 d) 2,15443

1.10. a) $a = 1110$, $b = 800$, o 38,75% b) $x = 1{,}5$, $y = 4$, o 62,5%

1.11. a) $x > y$ b) $x < y$ c) $x < y$ d) $x = y$ e) $x < y$ f) $x > y$

1.12. a) 3 b) 2

1.13. a) -16 b) -1 c) 1 d) 1

1.14. a) $x \in \{-2, 2\}$ b) $x = 1$ c) $x \in \left\{1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right\}$ d) $x = -4\frac{1}{2}$

1.15. a) $x \in \left(-\infty, 2-\sqrt{3}\right)$ b) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle 1\frac{1}{2}, +\infty\right)$ c) $x \in (-4, -1)$

d) $x \in \mathbf{R} - \{2\sqrt{3}\}$

1.16. a) $\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$; wskazówka Doprowadź wyrażenie do postaci $\frac{b+2a}{ab}$.

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; wskazówka Doprowadź wyrażenie do postaci $\frac{a+b}{2ab}$.

Funkcja wykładnicza i jej własności

1.22. a) $t < y < x < z$ b) $y < z < t < x$ c) $y < x < t < z$ d) $z < y < x < t$

1.23. a) $m > n$ b) $m > n$ c) $m < n$ d) $m > n$

1.24. a) dodatnia b) ujemna c) ujemna d) dodatnia e) ujemna f) ujemna

1.25. a) $f(x) = 4^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ c) $f(x) = \left(2\sqrt{2}\right)^x$

1.26. a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ b) $2\sqrt{2}$ c) -3 d) $x \in (-\infty, -1)$

1.27. a) $g(x) = 16^x$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $x \in \langle 0, 1)$

1.28. a) $x = 1$ b) $x = -1$ c) $x = 0$

1.29. a) $x \in (-\infty, 2)$ b) $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty)$ c) $x \in \langle -1, 0)$

Przekształcenia wykresów funkcji wykładniczych

1.30. a) $g(x) = 3^{x-2}$; przesunięcie równoległe o 2 jednostki w prawo, czyli translacja o wektor $\vec{u} = [2, 0]$

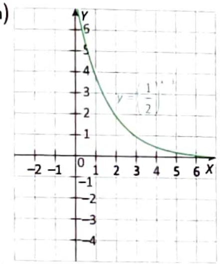
b) $g(x) = 1 - 3^{-x}$; symetria środkowa wykresu funkcji f względem punktu $O(0, 0)$, następnie przesunięcie równoległe otrzymanego wykresu o 1 jednostkę do góry, czyli translacja o wektor $\vec{u} = [0, 1]$

c) $g(x) = -\left(3^{x+1} + 3\right)$; np. przesunięcie równoległe wykresu funkcji f o 1 jednostkę w lewo i 3 jednostki do góry, czyli translacja o wektor $\vec{u} = [-1, 3]$, następnie symetria osiowa otrzymanego wykresu względem osi OX

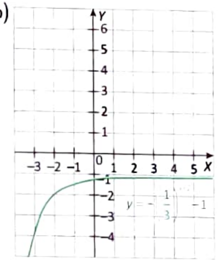
d) $g(x) = 3^{4-x} + 5$; np. przesunięcie równoległe wykresu funkcji f o wektor $\vec{u} = [-4, 5]$, następnie symetria osiowa otrzymanego wykresu względem osi OY

1.31. a) $h(x) = -3^x - 1$ b) $s(x) = 3^{x+2}$ c) $t(x) = 3^{x-2} - 1$ d) $p(x) = 3^{-x} + 2$

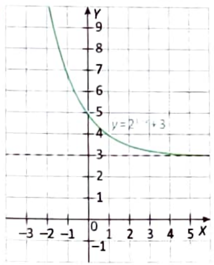
1.32. a)



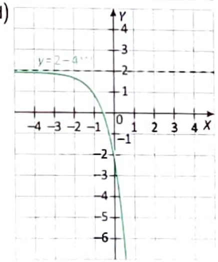
b)



c)



d)



1.33. a) $g(x)=2^{-x-2}-1$ b) $\left(0,-\frac{3}{4}\right)$ c) tak

1.34. a) $g(x)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ b) -80 c) $x\in(-2,+\infty)$

1.35. a) $g(x)=2-\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}$, czyli $g(x)=-4^{x-3}+2$ c) $x\in(-\infty,3\rangle$

1.36. a) $h(x)=-5^{x-7}-3$ b) $h(x)=7^{-5-x}+4$

1.37. a) wskazówka: $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-4$ b) 25 c) $x\in(-\infty,-2)$

1.38. a) wskazówka: $g(x)=2^x-2$ b) $x\in\langle 1,+\infty)$ c) tak

1.39. a) $x=3$ b) równanie sprzeczne c) $x=-1$ d) $x\in\mathbf{R}$ e) $x=-1$ f) $x=4$

1.40. a) $x=1$ b) $x\in\{1,3\}$ c) $x\in\{-3,-1\}$

1.41. a) $x\in(-\infty,1\rangle$ b) $x\in(-1,+\infty)$ c) $x\in(-\infty,1\rangle$ d) $x=0$ e) $x\in\langle -3,+\infty)$ f) $x\in\mathbf{R}$

1.42. a) $x\in(-\infty,3\rangle$ b) $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ c) $x\in(-\infty,1\rangle\cup\langle 2,+\infty)$

1.43. a) $a=3,\ b=\frac{1}{9}$ b) $x\in(-\infty,3\rangle$

1.44. a) $a=8,\ c=4$ b) $h(x)=2^{2-x}+1$, czyli $h(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}+1$ c) $x=1$

Równania wykładnicze

1.45. a) $x=3$ b) $x=2$ c) równanie sprzeczne d) $x=-1$ e) $x=-3$ f) $x=0$

1.46. a) $x=-3$ b) $x=2$ c) $x=\frac{2}{3}$ d) $x=\frac{1}{9}$ e) $x\in\left\{0,1\frac{1}{2}\right\}$ f) $x=\frac{2}{3}$

1.47. a) $x\in\{-2,4\}$ b) $x\in\{-8,4\}$ c) równanie sprzeczne d) $x=3$ e) $x\in\left\{-1\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right\}$ f) $x\in\{3,5\}$

1.48. a) $x=1$ b) $x\in\{-2,2\}$ c) $x\in\left\{-\frac{1}{3},0\right\}$ d) $x\in\{-1,4\}$ e) $x=2$ f) równanie sprzeczne

1.49. a) $x\in\left\{-1\frac{1}{2},1\right\}$ b) $x\in\{-\sqrt{5},-1,\sqrt{5}\}$ c) równanie sprzeczne d) $x=\frac{1}{2}$ e) $x\in\{-1,2\}$ f) $x\in\left\{-2\frac{1}{2},-1,1\right\}$

1.50. a) $x=1$ b) $x\in\{2,5\}$ c) $x\in\{-1,4\}$ d) $x\in\{-1,1\}$ e) $x\in\left\{-2,2,2\frac{1}{2}\right\}$ f) $x\in\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{4},\frac{-3+\sqrt{17}}{4},2\right\}$

1.51. a) $x=2$ b) $x=\frac{3}{2}$ c) $x=-1\frac{1}{2}$ d) równanie sprzeczne

1.52. a) $x\in\{-3,3\}$ b) równanie sprzeczne c) $x=-2$ d) $x=-\frac{1}{2}$

1.53. a) $x=1$ b) równanie sprzeczne c) $x=0$ d) $x\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ e) $x=\frac{-2}{3}$; wskazówka: Zastosuj wzór na różnicę sześcianów. f) $x=1$; wskazówka: Zastosuj wzór na sumę sześcianów.

1.54. a) $x\in\{-1,1\}$; wskazówka: Zauważ, że $2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$, następnie podstaw $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x$. b) $x\in\{-2,2\}$

1.55. a) $x=1\frac{1}{2}$ b) $x=-2$ c) $x=-6$ d) $x=-2$ e) $x=4\frac{1}{2}$ f) $x=-\frac{2}{3}$

1.57. a) $n=10$ b) $n=4$

1.58. a) $x=4$ b) $a_n=8n-4,\ n\in\mathbf{N}_+$ c) $S_{10}=400$

1.59. a) $x=1$ b) $q=1\frac{1}{2}$ c) $b_n=8\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n,\ n\in\mathbf{N}_+$

Nierówności wykładnicze

1.60. a) $x\in(-\infty,-4)$ b) $x\in\langle -1,+\infty)$ c) $x\in\mathbf{R}$ d) $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right\rangle$ e) $x\in\left(-\infty,-1\frac{1}{7}\right)$ f) nierówność sprzeczna

1.61. a) $x\in(-\infty,-3\rangle\cup\langle -1,+\infty)$ b) $x\in\left(-\frac{1}{3},2\frac{1}{3}\right)$ c) $x=2$ d) $x\in\left\langle -5\frac{1}{7},-2\frac{6}{7}\right\rangle$

1.62. a) $x\in\left(-2,\frac{1}{3}\right)$ b) $x\in\mathbf{R}$ c) $x\in\left(-1\frac{1}{2},5\right)$ d) $x\in\mathbf{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ e) $x\in\left(-2,\frac{1}{3}\right)$ f) $x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 3,+\infty)$

1.63. a) $x\in(-\infty,-1)$ b) $x\in(-7,+\infty)$ c) nierówność sprzeczna d) $x\in\mathbf{R}-\left\{1\frac{1}{3}\right\}$ e) $x\in(-\infty,1\rangle\cup\langle 2,+\infty)$ f) $x\in\mathbf{R}$

1.64. a) $x\in(-\infty,-1)$ b) $x\in(2,+\infty)$ c) $x\in\langle -3,+\infty)$ d) $x\in(-\infty,5\rangle$

1.65. a) $x \in (-2, 0)$ b) $x \in \left(-1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$ c) $x \in \langle -1, +\infty)$ d) $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

1.66. a) $x \in (-\infty, 5\rangle$ b) $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ c) nierówność sprzeczna
d) $x \in (-\infty, 1)$ e) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{4}, +\infty\right)$ f) $x = \frac{1}{3}$

1.67. a) $x \in \left\langle \frac{2}{3}, +\infty\right)$ b) $x \in (-3, +\infty)$ c) $x \in (-\infty, 0)$ d) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right\rangle$
e) $x \in R$ f) $x \in (-\infty, 4)$

1.68. a) $n \in \{1, 2, 3\}$ b) $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Test sprawdzający do rozdziału 1.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	C	D	A	D	B	B	A	C	B	C

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

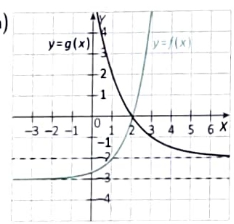
11. a) 0,64 b) $-5\sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{3}$ d) 25

12. $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ 14. $\frac{25}{16}$

16. 7

19. a) $-\frac{1}{2}$ b) 12 c) $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ d) $g(x) = 4 - 2^{x+\frac{3}{2}}$, $x \in R$

20. $a = -9$ a)



b) $x \in (2, +\infty)$

21. a) $x \in (-\infty, -1\rangle$ b) $a = \frac{1}{4}$, $b = 2\frac{7}{8}$ c) $7\frac{7}{8}$ d) $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 2\frac{7}{8}$, $x \in R$

22. a) $a = 2$, $b = -7$ b) $x \in (-\infty, 5)$

23. a) $x = 6\frac{1}{2}$ b) $x \in \left(-\infty, \frac{3}{13}\right)$ c) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

24. a) $M(t) = 0{,}8^t \cdot 50$, $t \geqslant 0$ b) po trzech latach

25. a) $x \in \left\{-1\frac{1}{2}, 1\right\}$ b) $x \in \left\{-1, \frac{-1}{3}\right\}$ c) $x \in \{-2, -1, 2\}$ d) $x = -2$
e) $x \in \{-3, 1\}$ f) $x = 1\frac{1}{3}$

26. a) $x \in (-\infty, 4)$ b) $x \in R$ c) $x \in (-\infty, -2)$ d) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 1, +\infty)$
e) $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ f) $x \in (0, +\infty)$

2. Funkcja logarytmiczna

Logarytm – powtórzenie wiadomości

2.1. a) 7 b) −1 c) 0 d) −3 e) 2 f) 3 g) $\frac{1}{2}$ h) $-\frac{1}{4}$

2.2. a) 7,5 b) $-1\frac{1}{6}$ c) $-2\frac{1}{3}$ d) 6,5 e) $-4\frac{1}{3}$ f) $-5\frac{7}{9}$ g) $1\frac{7}{12}$ h) $5\frac{3}{5}$

2.3. a) $k = \log_A \frac{B+1}{t}$ b) $p = \log_A \frac{t}{B} + k$ c) $t = \log_p \frac{4B}{2A + kB}$ d) $A = \left(\sqrt{p}\right)^B$
e) $t = 10^{A+k} - B$ f) $A = 0{,}1^t$

2.4. a) 4 b) −2 c) −4 d) 1 e) 2 f) −15

2.5. a) $\log_2 10$ b) $\log 0{,}03$ c) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{5}{2}$ d) $\log_2 25\sqrt[3]{2}$ e) $\log_{\frac{1}{4}} 6$ f) $\log_{81} 13{,}5$

2.6. a) 2500 b) $62\frac{1}{2}$ c) $2\frac{1}{4}$ d) 18 e) 0,8 f) 37,5

2.7. a) 2 b) 3 c) 1 d) 9 e) 2 f) 1

2.8. a) $x = \frac{-5}{6}$ b) $x = \frac{-1}{7}$ c) $x = -5$ d) $x = -1$

2.9. a) 3 b) 0 c) 1 d) 20 e) 9 d) 0

2.10. a) −6 b) 21 c) −6 d) 4

2.11. a) 1 b) 1 c) $\log_5 6$ d) $\log_2 \frac{5}{3}$ e) $\log_3 18$ f) $\log^2_{\frac{1}{2}} 5 + 3\log_{\frac{1}{2}} 5 + 9$

2.12. $-\frac{1}{2}$

2.13. 9

2.14. $\frac{1}{3}$

Funkcja logarytmiczna – powtórzenie i uzupełnienie wiadomości

2.20. a) $x \in (0, 2)$ b) tak, należy

2.21. a) 0,5 b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2.22. $a = \frac{1}{4}$ a) $\frac{1}{32}$ b) $1\frac{1}{2}$

2.23. $a = 2$ a) $x \in (2, +\infty)$ b) $x \in \langle 4, 8 \rangle$

2.24. a) $y < x < z < t$ b) $z < y < x < t$

2.25. a) $k = 1$ b) $k = -2$ c) $k = 0$ d) $k = -2$ e) $k = 1$ f) $k = -1$ g) $k = 2$ h) $k = -3$

2.26. a) ujemna b) zero c) ujemna d) dodatnia

2.27. a) $x \in (-6, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, 2\rangle$ c) $x \in (-\log_3 2, +\infty)$ d) $x \in (2, +\infty)$

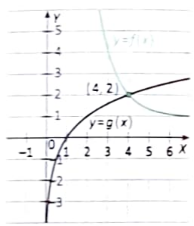
2.28. a) $x > y$ b) $x < y$ c) $x > y$ d) $x > y$

2.29. a) $b = -2$

2.30. $r + m = 5$

2.31. a) $k = -1$, $p = 2$ b) $\frac{1}{2}$

2.32. a) $a = 2$ b) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in (0, 4)$



2.33. a) $D_f = (-5, +\infty)$ b) $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, 4)$ c) $D_f = (0, 1) \cup (1, 3)$

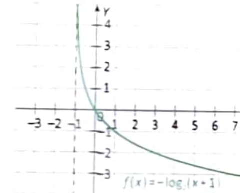
Przekształcenia wykresów funkcji logarytmicznych

2.34. wskazówka a) $f(x) = \log_3 x + 2$, $D_f = (0, +\infty)$ b) $f(x) = -\log_2 x + 3$, $D_f = (0, +\infty)$
c) $f(x) = \log_{0,5}[(-x)\cdot 2]$, skąd $f(x) = \log_{0,5}(-x) - 1$, $D_f = (-\infty, 0)$ d) $D_f = (-2, +\infty)$
e) $D_f = (-\infty, 1)$ f) $f(x) = \log_2(x-3) + 2$, $D_f = (3, +\infty)$

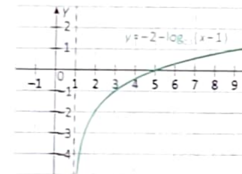
2.35. a) $D_f = (5, +\infty)$ b) 9 c) -3

2.36. a) $(0, -2)$ b) $f(6) = -3$ c) $x \in (-3, 6)$

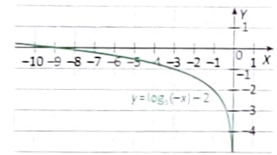
2.37. a) tak, jest b) $x \in (-1, 0)$ c) $x \in (3, +\infty)$



2.38. a) $x = 9$ b) $x \in \langle 2, 9)$



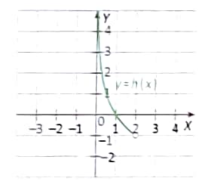
2.39. $D_h = (-\infty, 0)$ a) $x \in \langle -3, 0)$ b) tak, należy



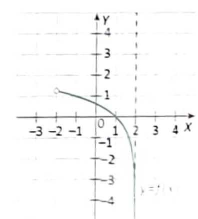
2.40. a) $g(x) = \log_2(x-1) - 3$, $D_g = (1, +\infty)$ b) $x = 5$

2.41. a) $g(x) = 2 - \log_{\frac{1}{2}} x$, $x \in (0, +\infty)$ b) $x \in \langle 2, 8 \rangle$

2.42. a) $D_h = (0, 2)$, $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ b) $ZW = (-1, +\infty)$



2.43. a) $f(x) = \log_3(2-x)$, $D_f = (-2, 2)$ b) $x \in (-2, -1)$



2.44. a) $x = 3$ b) $x = -1$ c) $x \in \{-4, -1\}$ d) $x = 3$

2.45. a) $x \in \langle 4, +\infty)$ b) $x \in (2, +\infty)$ c) $x \in (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-9, -1)$

Równania logarytmiczne

2.46. a) $D = (1, +\infty)$, $x = 33$ b) $D = \left(-2\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $x = 2$ c) $D = (-\infty, 5)$, $x = -59$

d) $D = \left(-\infty, 1\frac{1}{2}\right)$, $x = -16\frac{1}{2}$ e) $D = \boldsymbol{R} - \{7\}$, $x \in \{5, 9\}$

f) $D = \boldsymbol{R} - \{-2\}$, $x \in \{-3, -1\}$

2.47. a) $D = (0, +\infty)$, $x = \frac{1}{8}$ b) $D = (-\infty, 2)$, $x = 1\frac{2}{3}$ c) $D = (-1, +\infty)$, $x = \frac{-4}{5}$

d) $D = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$, $x = -4\frac{3}{4}$ e) $D = \boldsymbol{R}$, $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ f) $D = \boldsymbol{R}$, równanie sprzeczne

2.48. a) $D = \boldsymbol{R}$, $x \in \{-2, 0\}$ b) $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $x \in \{-3, 3\}$

c) $D = \left(-1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$, $x \in \{-1, 1\}$ d) $D = \boldsymbol{R} - \{-2\}$, $x \in \{-4, 0\}$

e) $D = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, $x \in \{0, 4\}$ f) $D = (-1, 5)$, $x \in \{1, 3\}$

2.49. a) $D = \boldsymbol{R}$, $x \in \{0, 4\}$ b) $D = \boldsymbol{R} - \{0\}$, $x \in \left\{-6\frac{1}{4}, 6\frac{1}{4}\right\}$

c) $D = (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$, $x \in \{-32, 26\}$ d) $D = (1, 9)$, równanie sprzeczne

e) $D = \boldsymbol{R}$, $x = -7$ f) $D = (-1, 2)$, $x = \frac{1}{2}$

2.50. a) $D = \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$, $x = 3$ b) $D = \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$, $x = 9$ c) $D = \boldsymbol{R}_+ - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $x = \frac{1}{8}$

d) $D = \boldsymbol{R}_+ - \{5\}$, równanie sprzeczne e) $D = \boldsymbol{R} - \{-1, 0, 1\}$, $x \in \{-6, 6\}$

f) $D = \boldsymbol{R} - \{0, 1, 2\}$, $x \in \{1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\}$

2.51. a) $D = \left(1\frac{1}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty)$, $x = 4$ b) $D = (-\infty, 2) \cup (2, 3)$, $x = 0$

c) $D = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$, $x = 1$ d) $D = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, równanie sprzeczne

e) $D = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $x = 3$ f) $D = (-\infty, 1) \cup (1, 2)$, równanie sprzeczne

2.52. a) $D = \boldsymbol{R}_+$, $x = 3$ b) $D = \boldsymbol{R}_+$, równanie sprzeczne c) $D = (2, 3) \cup (3, +\infty)$, równanie sprzeczne d) $D = \boldsymbol{R} - \{0\}$, $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ e) $D = (-7, 4) \cup (4, 5)$, $x = -1$

f) $D = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, $x \in \{-2, 2\}$

2.53. a) $x = 3$ b) $x = 16$ c) $x = -0{,}9$ d) $x = -3\frac{2}{3}$ e) $x = 64$ f) $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$

2.54. a) $x = 4$ b) $x = 33$ c) $x \in \left\{\frac{1}{81}, \sqrt{3}\right\}$ d) $x \in \left\{-4\frac{2}{3}, -2\right\}$ e) $x = 2$ f) $x = 2$

2.55. a) $D = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $x = 1$ b) $D = (3, +\infty)$, $x = 4$ c) $D = (-1, 1)$, $x = \frac{-1}{3}$

d) $D = (0, +\infty)$, $x = 6$ e) $D = (0, 1)$, równanie sprzeczne

f) $D = \left(\frac{20}{21}, +\infty\right)$, $x \in \left\{1\frac{1}{2}, 10\right\}$

Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym

2.56. a) 5,7 g b) po 20 dniach c) po 5 dniach i 6 godzinach d) 14,1 g

2.57. a) 50°C b) 12,5°C c) po 20 min d) po 23 min i 13 s

2.58. a) 230,18 zł b) po 13 kwartałach

2.59. a) Korzystniejsza jest pierwsza oferta o 180,69 zł b) o 3 kwartały

2.60. 0,04 cm

2.61. ok. 4,3

2.62. 24 862 048 cyfr; *wskazówka:* Zauważ, że liczba pierwsza ma tyle samo cyfr co liczba $2^{82589933}$.

Test sprawdzający do rozdziału 2.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	B	A	A	B	C	D	C	D	A	C

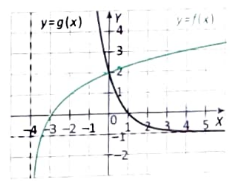
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

11. a) 4 b) 0,5

12. $c < a < d < b$

13. a) $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ c) $x = 4$ d) $x \in (0, 1)$

14. a) $a = 4$, $b = -1$, $D_f = (-4, +\infty)$, $D_g = \boldsymbol{R}$
b) $f(-3) = 0$, $g(1) = 0$
d) $x \in (-3, 1)$



15. a) $90°C$ b) $60°C$ c) $t=-5\cdot\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{T}{90}\right)$, 10 minut

16. a) $x=3$ b) $x=-1$

17 a) $x\in\langle 7,+\infty)$ b) $x\in(-2,-1\rangle$

18. a) $x\in\{-1,4\}$ b) $x=12$ c) $x=2$ d) $x=-7$ e) $x\in\{3,9\}$ f) $x\in\left\{2\frac{1}{100}, 102\right\}$

26. a) $x=5$ b) $a_n=5n-8,\ n\in \mathbf{N}_+$ c) 423

27. a) $x=2$ lub $x=-1\frac{1}{2}$ b) $b_n=(-1)^{n+1},\ n\in\mathbf{N}_+$ c) $b_{10}=512$

3. Elementy statystyki

Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej

3.2. diagram kolumnowy

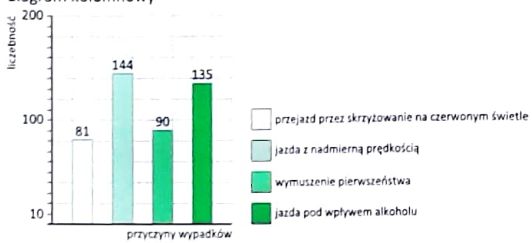
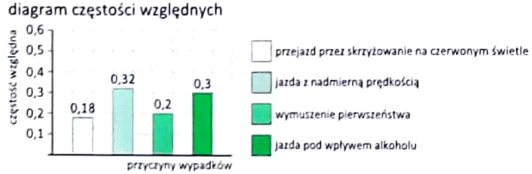


diagram częstości względnych



3.3. a) 25 osób

b) diagram słupkowy

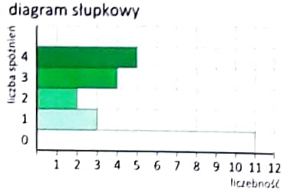
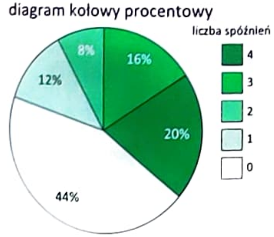


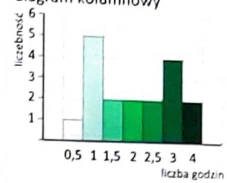
diagram kołowy procentowy



3.4. a) tabela

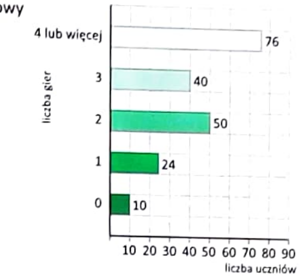
Liczba godzin	Liczebność
0,5	3
1	5
1,5	2
2	2
2,5	2
3	4
4	2

diagram kolumnowy



b) 60%

3.5. a) diagram słupkowy



b) 116 uczniów

3.6. a) 56% b) samochodem służbowym 4 osoby, na motocyklu lub na rowerze 9 osób

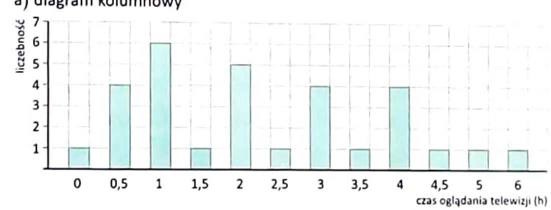
3.7. a) 30 b) 70 c) $2\frac{1}{3}$

Średnia z próby

3.8. $x=5$

3.9. 48 lat

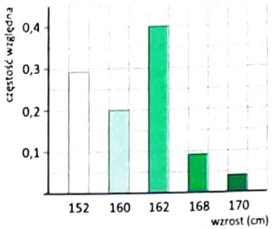
3.10. a) diagram kolumnowy



b) 2,3 godziny c) 43,3% d) 2 osoby

3.11. a) 159,6 cm

b) diagram częstości względnych:



c)

Wzrost (cm)	152	160	162	168	170
Liczebność	21	15	30	6	3

d) 54 dziewczynki

3.12. a) 2,5 b) ok. 49%

3.13. a) 0,81 b) 46 osób c) o $22\frac{2}{9}\%$

3.14. a) 56 b) 31% c) średnia w mieście A to 1,2 średnia w mieście B to 1,12 d) 1,16

3.15. a) 20 pracowników, 40% b) średnia I zmiany to 1,5 sztuki wadliwej, zaś średnia II zmiany to 1,7 sztuki wadliwej c) 1,58

3.16. 5 : 14

3.17. 23 osoby

3.18. Eliza

3.19. Średnia cena akcji firmy B była mniejsza o 7,25 zł od średniej ceny akcji firmy A.

3.20. $\overline{x}_B = 5{,}8$ $\overline{x}_S = 8{,}1$ $\overline{x}_Z = 6{,}65$ $\overline{x}_W > 70$
Kawa będzie w stałej ofercie tej kawiarni.

Mediana z próby i moda z próby. Skala centylowa

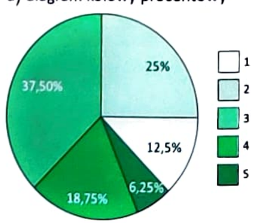
3.21. a) $M_o = 2$, $M_e = 4{,}5$ b) są dwie mody: 4 i 8, $M_e = 4$ c) $M_o = 3$, $M_e = 3$ d) są cztery mody: 0, 1, 2, 3, $M_e = 1{,}5$

3.22. a) $M_o = 3$, $M_e = 5$ b) $M_o = 8$, $M_e = 6{,}5$

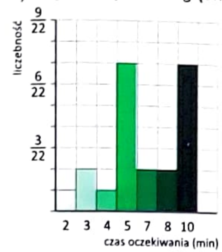
3.23. a) są dwie mody 7 i 9, $M_e = 8$ b) $M_o = 4$, $M_e = 4$ c) $M_o = 7$, $M_e = 4$
d) $M_o = 1$, $M_e = 1$

3.24. Są dwie mody: 34 min oraz 42 min, $M_e = 37$ min, $\overline{x} \approx 37{,}4$ min

3.25. a) $M_o = 3$, $M_e = 3$ b) $\overline{x} \approx 2{,}8$ c) 87,5% d) diagram kołowy procentowy



3.26. a) diagram częstości względnych



b) Są dwie mody: 5 i 10, $M_e = 6$.
c) ok. 6 min 41 sek.
d) 50%

3.27. a) 33 osoby b) $\overline{x} = 2{,}02$ c) 34% d) $M_e = 2$

3.28. $a = 3$, $b = 2$

3.29. $(x = 0, y = 4)$ lub $(x = 1, y = 4)$

3.30. $k = 8$, $\overline{x} = 9{,}7$

3.31. a) 85 b) 15%

3.32. a) 28 pkt, 76% b) 288 c) 32 d) 44 osoby, 11% zdających e) $M_o = 1$, $M_e = 16$
f) $\overline{x} = 17{,}83$

Wariancja i odchylenie standardowe

3.33. a) 0,984375 b) 0,1384 c) 941,36 d) 114,09

3.34. a) 10,42 b) 0,83

3.35. 161

3.37. $k \in \{-3, 3\}$

3.38. $\overline{x} = 7{,}6$

3.42. a) $M_o = 3640$ zł, $M_e = 4420$ zł b) 4811,42 zł c) 62% d) ok. 2568 zł

3.43. a) $\overline{x} = 119{,}9$ g b) $\sigma \approx 2{,}15$ g c) nie

3.44. I drużyna: $\overline{x} = 1{,}4$, $\sigma \approx 1{,}16$ II drużyna: $\overline{x} = 1$, $\sigma \approx 1{,}18$

3.45. a) dla I łucznika $M_e = 26$, dla II łucznika $M_e = 28$ b) dla I łucznika $\overline{x}_I = 25{,}4$; dla II łucznika $\overline{x}_{II} = 27$ c) $\sigma_I \approx 3{,}4$; $\sigma_{II} \approx 2{,}1$ d) II zawodnik

3.46. a) $M_e = 40$ b) $\overline{x} = 42$, marzec, maj, czerwiec, listopad, grudzień c) $\sigma \approx 18$
d) w styczniu i w lutym

3.47. a) $\overline{x} = 25{,}35$ mm b) $\sigma \approx 0{,}3$ mm

Test sprawdzający do rozdziału 3.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	C	A	A	B	D	D	C	D

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

9. 12 lekarzy
10. a) 2,984 b) 125
11 a) $(x = 3, y = 5)$ lub $(x = 5, y = 3)$
b) $(x = 0, y = 10)$ lub $(x = 1, y = 9)$ lub $(x = 2, y = 8)$
12. a) $M_o = 5$, $M_e = 3{,}5$ b) $\bar{x} = 3{,}54$ c) $\sigma^2 = 2{,}5686$, $\sigma \approx 1{,}6$
13. pozostałe oceny Tomka: 5, 2
14. a) $M_e = 2$, $M_o = 2$ b) $\bar{x} = 2$ c) $\sigma \approx 1$
15. a) 7 pkt b) 70 osób c) 16 osób d) $M_o = 11$ pkt e) $M_e = 10$ pkt f) $\bar{x} = 9{,}63$ pkt

4. Rachunek prawdopodobieństwa

Kombinatoryka – powtórzenie

4.1. a) 52 b) 60
4.2. a) 12 b) 14 c) 21 d) 15
4.3. a) 12 b) 42
4.4. a) 220 b) 320
4.5. a) 9999 b) 700 c) 7 d) 35
4.6. a) $9 \cdot 9!$ b) 18 c) $9 \cdot 4^7$ d) $24 \cdot 5^6$
4.7. a) 60 b) 60
4.8. a) 625 b) 120 c) 81 d) 369
4.9. a) 720 b) 72
4.10. a) 5040 b) 120 c) 3600
4.11. a) 243 b) 840 c) 120 d) 35
4.12. a) 600 b) 300 c) 156 d) 234
4.13. a) 210 b) 221 c) 225 d) 414
4.14. a) $n = 14$ b) $n = 15$
4.15. a) 28 b) 56
4.16. a) 1785 b) 2240 c) 4505 d) 4505
4.17. a) 6 b) 60 c) 30 240 d) 7560
4.18. a) 24 b) 49 920 c) $4 \cdot \binom{48}{4} + \binom{48}{5}$ d) 4560

Doświadczenie losowe

4.19. b) $\Omega = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, f, n_1, n_2, n_3, n_4, z_1, z_2\}$
4.20. $\Omega = \{(O, 0), (O, 1), (O, 2), (O, 3), (O, 4), (O, 5), (O, 6), (O, 7), (O, 8), (O, 9), (R, 0), (R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6), (R, 7), (R, 8), (R, 9)\}$
przykładowy opis: $\Omega = \{(x, y): x \in \{O, R\} \wedge y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\}$
4.21. przykładowy opis: $\Omega = \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}$
4.22. *wskazówka:* a) $\overline{\overline{\Omega}} = 20$ b) $\overline{\overline{\Omega}} = 25$
4.23. a) np. $\Omega = \{(x, y): x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\}$, $\overline{\overline{\Omega}} = 81$
b) np. $\Omega = \{(x, y): x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \wedge x \neq y\}$; $\overline{\overline{\Omega}} = 72$
4.24. a) $\overline{\overline{\Omega}} = 100$ b) $\overline{\overline{\Omega}} = 90$
4.25. $\overline{\overline{\Omega}} = 24$
4.26. np. Ω – zbiór trzyelementowych wariacji z powtórzeniami o wartościach ze zbioru trzyelementowego, $\overline{\overline{\Omega}} = 27$
4.27. np. $\Omega = \{(x, y, z): x, y, z \in \{2, 3, 5, 7\}\}$, $\overline{\overline{\Omega}} = 64$
4.28. $\overline{\overline{\Omega}} = 32$
4.29. $\overline{\overline{\Omega}} = 512$
4.30. a) $\overline{\overline{\Omega}} = 625$ b) $\overline{\overline{\Omega}} = 120$
4.31. $\overline{\overline{\Omega}} = 1024$
4.32. a) np. $\Omega = \{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, n\}$
b) np.
$\Omega = \{\{b_1, c_1\}, \{b_1, c_2\}, \{b_1, c_3\}, \{b_2, c_1\}, \{b_2, c_2\}, \{b_2, c_3\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\}, \{c_1, c_3\}, \{c_2, c_3\}\}$
4.33. a) $\overline{\overline{\Omega}} = 156$ b) np. $\Omega = \{(x, y): x, y$ – uczniowie klasy IV f i $x \neq y\}$,
$\overline{\overline{\Omega}} = 25 \cdot 24 = 600$ c) np. $\Omega = \{\{x, y\}: x, y$ – uczniowie klasy IV f$\}$, $\overline{\overline{\Omega}} = \binom{25}{2} = 300$
4.34. a) $\overline{\overline{\Omega}} = 7$ b) np. Ω – zbiór siedmiowyrazowych ciągów różnowartościowych o wartościach ze zbioru siedmioelementowego, $\overline{\overline{\Omega}} = 5040$
4.35. a) np. Ω – zbiór czteroelementowych wariacji z powtórzeniami o wartościach ze zbioru siedmioelementowego, $\overline{\overline{\Omega}} = 2401$
b) np. Ω – zbiór czteroelementowych wariacji bez powtórzeń o wartościach ze zbioru siedmioelementowego, $\overline{\overline{\Omega}} = 840$
4.36. np. Ω – zbiór trzyelementowych wariacji bez powtórzeń o wartościach ze zbioru 16-elementowego, $\overline{\overline{\Omega}} = 3360$
4.37. (0, 0, 0), (0, 0, 50), (0, 20, 0), (0, 20, 50), (10, 0, 0), (10, 0, 50), (10, 20, 0), (10, 20, 50)
4.38. (R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (O, 5), (O, 6)

Zdarzenia. Działania na zdarzeniach

4.39. $A' \cap C$ – zdarzenie, że wylosowana karta jest asem kier lub asem karo, lub asem trefl

4.40. $A' \cup B' = \{10, 11, 12, 14, 15\}$

4.41. $(A \cup B) \cap C = \varnothing$ – zdarzenia $A \cup B$ i C się wykluczają oraz $(A \cup B) \cup C = \Omega$, więc zdarzenie C jest przeciwne do zdarzenia $A \cup B$.

4.42. a) $A \subset B$, czyli zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B b) A' – zdarzenie, że orzeł nie wypadł ani razu albo zdarzenie, że reszka wypadła dwa razy; B' – zdarzenie, że w obu rzutach otrzymaliśmy taki sam wynik albo zdarzenie, że wypadły dwa orły lub dwie reszki c) $A' \cup B = \{(R,R), (R, O), (O, R)\}$, $B' \cap A = \{(O, O)\}$, $(A' \cup B)' = B' \cap A$

4.43. $C = \{(O, 1), (R, 1), (O, 2), (R, 2), (O, 3), (R, 3), (O, 4), (R, 4), (O, 6), (R, 6)\}$

4.44. b) $A \subset B$, czyli zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B; $C \subset B$; $A \cup C = B$, czyli zdarzenia $A \cup C$ oraz B są identyczne; $B' \cap A = \varnothing$, czyli zdarzenia B' i A się wykluczają c) $B \cup C'$ – zdarzenie pewne; $B' \cap C$ – zdarzenie niemożliwe

4.45. a) 13 b) 23 c) 8

4.46. a) 3 b) 26 c) 12 d) 23, $(A \cap F) \cup (A \cap N) \cup (F \cap N)$ e) 12 f) 22, $N' \cup F'$

4.47. a) 21 b) 10 c) 6 d) 23 e) 8 f) 18

4.48. a) $\overline{\overline{A'}} = 17$ b) $\overline{\overline{A' \cap B'}} = 9$ c) $\overline{\overline{A \cup B}} = 19$ d) $\overline{\overline{(A \cap B') \cup (A' \cap B)}} = 15$

4.49. a) 12 b) 26

4.50. a) 12 b) 14

4.51. a) 25 b) 18

4.52. a) 26 b) 40

4.53. a) 25 b) 324 c) 425 d) 162

Określenie prawdopodobieństwa

4.54. a) 0,6 b) 0,9 c) 0,5

4.55. a) 0,5 b) 0,4 c) 0,6

4.56. a) $P(A) = 0{,}31$ $P(B) = 0{,}7$ b) Zdarzenia A i B nie wykluczają się, bo $P(A) + P(B) > 1$.

4.57. $P(B') = 0{,}5$ $P(B - A) = \frac{1}{6}$

4.58. $P(A \cup B) = 0{,}25$ $P((A \cup B) - A) = 0{,}08$ $P(A \cap B') = 0{,}13$

4.59. $P(B) = 0{,}13$ $P(B - (A \cap B)) = 0{,}12$ $P((A \cup B) - (A \cap B)) = 0{,}2$

4.60. $\frac{4}{7}$

4.61. 0,75

4.62. a) 0,1 b) 0,3 c) 0,7

4.63. $\frac{2}{15}$

4.64. $\frac{2}{5}$

Obliczanie prawdopodobieństwa

4.67. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}$

4.68. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{4}$

4.69. a) 0,1 b) 0,5

4.70. a) 0,125 b) 0,75

4.71. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{52}$ c) $\frac{4}{13}$ d) $\frac{3}{13}$; *wskazówka:* figury to walet, dama, król i as

4.72. a) 0,1 b) 0,6 c) $\frac{2}{15}$ d) $\frac{1}{18}$

4.73. a) $\frac{4}{15}$ b) $\frac{1}{2}$

4.74. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{15}$

4.75. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{43}{300}$

4.76. 0,3

4.77. 7

4.78. 32 osoby

4.79. a) 0,25 b) 0,75

4.80. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{1}{4}$

4.81. a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{12}$

4.82. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{9}$

4.83. a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{23}{36}$

4.84. a) $\frac{13}{36}$ b) $\frac{7}{18}$

4.85. a) $\frac{11}{16}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{8}$

4.86. a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 0,5

4.87. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{8}{25}$ d) $\frac{16}{25}$

4.88. a) $\frac{13}{18}$ b) $\frac{11}{72}$

4.89. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{10}{81}$ d) $\frac{56}{81}$

4.90. a) $\frac{7}{50}$ b) $\frac{3}{4}$

4.91. $\frac{1}{3}$

4.92. a) $\frac{1}{52}$ b) $\frac{15}{34}$ c) $\frac{220}{221}$ d) $\frac{105}{221}$

4.93. a) $\frac{231}{496}$ b) $\frac{441}{496}$

4.94. $\frac{207}{245}$

4.95. a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{2}{3}$

4.96. $\frac{2}{9}$

4.97. a) $\frac{14}{45}$ b) $\frac{28}{45}$

4.98. 11 wierzchołków

4.99. 5 kul białych

4.100. 6 chłopców

4.101. 6 piłek do siatkówki

4.102. a) 0,1 b) 0,05

4.103. $\frac{1}{6}$

4.104. a) $\frac{24}{125}$ b) $\frac{1}{125}$

4.105. a) $\frac{1}{1296}$ b) $\frac{5}{54}$

4.106. a) $\frac{1}{70}$ b) $\frac{1}{35}$

4.107. a) $\frac{1}{15}$ b) $\frac{1}{30}$ c) $\frac{4}{15}$

Doświadczenia losowe wieloetapowe

4.108. a) $\frac{13}{36}$ b) $\frac{11}{36}$

4.109. a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{7}{27}$

4.110. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{16}$ c) $\frac{219}{256}$ d) $\frac{3}{16}$

4.111. a) $\frac{609}{625}$ b) $\frac{96}{625}$

4.112. a) 0,512 b) 0,992

4.113. a) 0,59049 b) 0,32805

4.114. a) $\frac{31}{32}$ b) $\frac{3}{16}$

4.115. a) $\frac{175}{256}$ b) $\frac{3773}{4096}$

Zmienna losowa. Wartość oczekiwana zmiennej losowej

4.116. $\left\{\left(20, \frac{1}{50}\right), \left(10, \frac{2}{25}\right), \left(2, \frac{1}{5}\right), \left(0, \frac{7}{10}\right)\right\}$, $EX = 1{,}6$

4.117. $\left\{\left(20, \frac{1}{20}\right), \left(10, \frac{1}{20}\right), \left(5, \frac{1}{8}\right), \left(2, \frac{3}{4}\right), \left(-100, \frac{1}{40}\right)\right\}$, $EX = 1\frac{1}{8}$

4.118. 1

4.119. 1

4.120. – 0,5

4.121. 0

4.122. a) 0 b) Gra jest sprawiedliwa.

4.123. $x = 2$

4.124. $\left\{\left(400 - s, \frac{1}{16}\right), \left(120 - s, \frac{1}{4}\right), \left(-s, \frac{11}{16}\right)\right\}$, $s = 55$

4.125. $\left\{\left(0, \frac{8}{32}\right), \left(1, \frac{3}{32}\right), \left(2, \frac{5}{32}\right), \left(3, \frac{6}{32}\right), \left(4, \frac{4}{32}\right), \left(5, \frac{2}{32}\right), \left(6, \frac{3}{32}\right), \left(9, \frac{1}{32}\right)\right\}$, $EX = 2\frac{5}{8}$

Test sprawdzający do rozdziału 4.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	C	B	C	D	D	C	B	D	A	D

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

11. a) 9 b) 1080

12. 201 600

13. a) np. $\Omega = \{(x, y): x \in \{a, b, c\}, y \in \{1, 2, 3, 4\}\}$

b) np. $\Omega = \{(a, b, c, d): a, b, c, d \in \{1, 2, 3\}\}$

c) np. $\Omega = \{(x, y, z): x, y, z \in \{A, B, C, D, E, F\} \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z$

14. $\frac{9}{25}$

15. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{12}$

16. co najwyżej 6 kul czerwonych

17. a) 0,09 b) $\frac{8}{45}$

18. a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{18}$

19. a) $\frac{13}{18}$ b) $\frac{11}{18}$

20. a) $\frac{11}{64}$ b) $\frac{7}{8}$

21. $\frac{5}{21}$

22. a) $\frac{19}{28}$ b) $\frac{13}{28}$

23. a) $\frac{8}{663}$ b) $\frac{19}{34}$ c) $\frac{15}{34}$ d) $\frac{220}{221}$

24. a) $\frac{7}{15}$ b) $\frac{2}{5}$

25. a) $\frac{19}{78}$ b) $\frac{21}{52}$ c) $\frac{131}{780}$ d) $\frac{43}{260}$

26. a) 0,2 b) 0,3

27. a) $\frac{215}{216}$ b) $\frac{3}{8}$

28. a) $\frac{127}{128}$ b) $\frac{1}{16}$

29. $\frac{19}{33}$

30. $\left\{\left(70, \frac{1}{1650}\right), \left(50, \frac{2}{825}\right), \left(30, \frac{19}{330}\right), \left(10, \frac{62}{825}\right), \left(-10, \frac{713}{825}\right)\right\}$, $EX = -6$

5. Geometria przestrzenna. Wielościany

Płaszczyzny i proste w przestrzeni. Równoległość prostych i płaszczyzn. Proste skośne

5.2. a) proste k i m są skośne lub proste k i m się przecinają
b) proste k i m są skośne

5.4. a) nie b) tak

5.6. wskazówka Wykaż, że $PQ \parallel AB$.

5.7. wskazówka: Wykorzystaj twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie.

5.8. c) wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia 6., podręcznik str. 226

Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni

5.9. wskazówka: Wykaż, że prosta AB jest prostopadła do płaszczyzny (BSC).

5.10. a) tak b) nie c) nie d) tak e) nie f) tak

5.11. tak

5.12. wskazówka Wykaż najpierw, że prosta AC jest prostopadła do płaszczyzny (DBE).

5.13. tak; wskazówka Uzasadnij najpierw, że prosta FG jest prostopadła do płaszczyzny π.

5.14. tak; wskazówka Uzasadnij najpierw, że prosta BC jest prostopadła do płaszczyzny (AED).

5.15. tak; wskazówka Uzasadnij najpierw, że $ED \perp FC$.

5.16. tak

Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę

5.20. $|A_1C_1| : |C_1D_1| : |D_1B_1| = 1 : 2 : 3$

5.21. $|A_1D_1| : |D_1E_1| : |E_1B_1| = 1 : 1 : 2$

5.24. wskazówka Wykaż, że $SO \perp AB$ oraz że trójkąty AOS, BOS i COS są przystające.

5.25. 11 cm

5.26. 13 cm

5.27. 8 cm

Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

5.29. nie

5.32. 25,5 cm

5.33. 8 cm

5.34. 20 cm

Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny

5.35. a) 4 cm b) $4\sqrt{2}$ cm c) $4\sqrt{3}$ cm

5.36. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5.37. a) $1\frac{1}{3}$ b) 0,8

5.38. 0,8

5.39. a) 1,6 b) 2

5.40. a) $\frac{3\sqrt{34}}{34}$ b) 0,6

5.41. a) 45° b) 0,6 c) $1\frac{2}{3}$

Graniastosłupy

5.42. a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\sqrt{3}$ cm

5.43. $d = 5\sqrt{2}$ cm; 45°

5.44. $d_1 = 10$ cm, $d_2 = 8\sqrt{10}$ cm, $d_3 = 6\sqrt{17}$ cm

5.45. a) 2 b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5.46. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ c) 30°

5.47. a) 60° b) $\sqrt{139}$ cm

5.48. $4\sqrt{3}$ cm

5.49. $d_1 = 10$ cm, $d_2 = \sqrt{91}$ cm

5.50. a) $s = \frac{n}{2} + 2$, $k = \frac{3n}{2}$ b) $s = 7$, $k = 15$

5.51. $w = 14$, $s = 9$, $k = 21$

5.52. dziesięciokąty

Ostrosłupy

5.53. a) 6 ścian, 10 krawędzi b) n ścian, $2(n-1)$ krawędzi

5.54. 8 wierzchołków

5.55. a) $20\sqrt{2}$ cm b) $10\sqrt{6}$ cm c) $10\sqrt{7}$ cm

5.56. a) 3 cm b) $\sqrt{17}$ cm c) 2,4 cm

5.57. a) 30° b) $2\frac{1}{4}$ cm

5.58. a) 40 dm b) 60°

5.59. $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{2}$, $\alpha \approx 55°$

5.60. a) 4 dm b) 30°

5.62. b) $a = 3 + \sqrt{6}$

5.63. a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{3}$

5.64. a) $20\sqrt{3}$ cm b) 60 cm

5.65. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{15}}{5}$

5.66. a) 30° b) 60°

5.67. a) 45° b) 60°

5.68. a) 45° b) $\sqrt{7}$ dm

5.69. a) 90 cm b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5.70. a) 12 cm b) $h_1 = 4\sqrt{10}$ cm, $h_2 = 3\sqrt{17}$ cm

5.71. a) $9\frac{19}{30}$ cm b) $\frac{289\sqrt{2}}{30}$ cm

5.72. a) $12\frac{1}{24}$ cm; wskazówka: Wyznacz najpierw promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa. b) $\frac{15}{17}$

5.73. a) 9 b) $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{19}{27}$, $\cos\gamma = \frac{1}{9}$; wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia sinusów do obliczenia długości najdłuższego boku trójkąta w podstawie ostrosłupa.

5.74. a) 12; wskazówka: Zastosuj twierdzenie cosinusów do obliczenia długości najdłuższego boku trójkąta w podstawie ostrosłupa. Następnie skorzystaj z twierdzenia sinusów do wyznaczenia promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa. b) 0,6

5.75. a) 27 cm; wskazówka: Uzasadnij, że ostrosłup jest prosty. b) $\frac{7}{9}$

5.76. a) $\mathrm{tg}\,\beta = 3$, $\mathrm{tg}\,\gamma = 4$ b) $4\frac{8}{13}$

5.77. a) $|AB| = \sqrt{337}$, $|AS| = 15$, $|BS| = 20$ b) 9,6 c) $\frac{\sqrt{337}}{12}$

5.78. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) 45° d) 120°

5.79. a) $3\frac{3}{4}$, b) $\frac{\sqrt{353}}{4}$, $\frac{\sqrt{545}}{4}$, $\frac{\sqrt{865}}{4}$

5.80. a) 15 cm b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu

5.84. 552 cm^2

5.86. a) 4 b) 12

5.87. a) 12 dm^2 b) 128 cm^2

5.88. a) 120 cm^2 b) 192 cm^2

5.89. 6 cm, 6 cm, 5 cm

5.90. 2700 cm^2

5.91. 5 cm, $5\sqrt{3}$ cm, $5\sqrt{3}$ cm

5.92. 20 cm

5.93. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

5.94. 2520 cm^2

5.95. $8\left(3+\sqrt{3}\right)$ dm^2

5.96. 48 cm^2

5.97. $\sqrt{2}$

5.98. $100\sqrt{3}$ cm^2

5.99. $5\sqrt{3}$ cm

5.100. a) 10 cm b) $12\left(4+\sqrt{41}\right)$ cm^2

5.101. 65 cm

5.102. a) $\sqrt{3}$ dm, 2 dm, 2 dm, $\sqrt{5}$ dm b) $\left(3+\sqrt{3}\right)$ dm^2

5.103. 2720 cm^2

Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów

5.104. 128 litrów

5.105. 3 cm

5.106. $40\sqrt{15}$ dm^3

5.107. a) $P_c=49\left(1+2\sqrt{3}\right)$ cm^2, $V=\frac{343\sqrt{3}}{2}$ cm^3 b) $P_c=98\left(1+2\sqrt{2}\right)$ cm^2, $V=343\sqrt{2}$ cm^3

5.108. $14\sqrt{3}$ dm^2

5.109. $18\sqrt{2}$ cm^3

5.110. $P_b=6$ dm^2, $V=1{,}5\sqrt{3}$ dm^3

5.111. 108 cm^3

5.112. a) $\left(780+84\sqrt{5}\right)$ $cm^2 \approx 968$ cm^2 b) $1260\sqrt{5}$ $cm^3 \approx 2817$ $cm^3 \approx 2{,}8$ l

5.113. $P_c=378$ cm^2, $V=324$ cm^3

5.114. 720 cm^3

5.115. 1500 cm^3

5.116. $288\sqrt{2}$ cm^3

5.117. 360 cm^3

5.118. $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ cm^3

5.119. a) 2 dm b) $P_b=15$ dm^2

5.120. a) 6 cm b) $P_c=36\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm^2

5.121. wysokość ostrosłupa: $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm, długość wszystkich krawędzi: 4 cm

5.122. a) 1 dm b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ dm

5.123. 48 dm^3

5.124. $250\sqrt{2}$ cm^3

5.125. 48 cm^3

5.126. 1800 cm^3

5.127. a) 9 cm b) $3\sqrt{21}$ cm

5.128. $\frac{1}{3}$ m^3

5.129. $6+3\sqrt{3}$

5.130. a) 72 cm^3 b) $\frac{6}{\sqrt{65}}$

Przekroje wielościanów – zadania

5.131. 1 dm^3

5.132. $100\sqrt{2}$ cm^2

5.133. 2600 cm^2

5.134. 376 cm^2

5.135. $8\sqrt{34}$ cm^2

5.136. 160 cm^2

5.137. $8\sqrt{3}$ cm^2

5.138. 35 200 m^3

5.139. 600 cm^3

5.140. a) 6 cm, 4 cm, 4 cm b) $6\sqrt{2}$ cm, 5 cm, 5 cm

5.141. $5\sqrt{5}$ cm

5.142. a) 16 cm b) 128 cm^2

5.143. $4\sqrt{2}$ dm^2

5.144. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; wskazówka: Odległość punktu B_1 od płaszczyzny $\left(A_1BC_1\right)$ jest równa wysokości ostrosłupa o podstawie A_1BC_1 i wierzchołku B_1. Oblicz objętość ostrosłupa $A_1BC_1B_1$ na dwa sposoby.

5.145. 3 cm^2

Test sprawdzający do rozdziału 5.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	**D**	**D**	**A**	**D**	**B**	**C**	**C**	**B**	**D**	**C**

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

11. 8 cm

12. *wskazówka:* Udowodnij, że $PQ \parallel BC_1$ oraz $BC_1 \parallel AD_1$. Następnie wykaż, że $|D_1P| = |AQ|$.

13. 2,5 cm

14. 288 cm^3

15. 13 cm

17. 3 : 4

18. a) $d_1 = 13$ cm, $d_2 = 14$ cm b) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

19. a) krawędź podstawy: $6\sqrt{2}$ cm, krawędź boczna: 10 cm b) $\frac{7}{25}$

20. a) $\frac{5}{13}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $18\sqrt{183}$ dm^2

21. a) 15 cm b) $\frac{15}{17}$ c) $7\frac{1}{17}$ cm

22. 546 cm^3; *wskazówka:* Zauważ, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

23. $V = 250\sqrt{3}$ cm^3, $P_c = 450$ cm^2; *wskazówka:* Zauważ, że podstawa ostrosłupa jest trójkątem prostokątnym, a spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę.

24. a) $60\left(3+\sqrt{2}\right)$ b) $1{,}2\sqrt{2}$; *wskazówka:* Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego w podstawie.

25. a) $|AB| = |AS| = 26$ cm, $|BS| = 24\sqrt{2}$ cm b) 2,6

6. Geometria przestrzenna. Bryły obrotowe

Walec

6.1. a) $r = 2$ cm, $h = 3$ cm b) 20π cm^2

6.2. a) $r = 2$ cm, $h = 4$ cm

6.4. a) 80π cm^2 b) 120π cm^2

6.5. π^2 dm^2

6.6. $\frac{h}{r} = 5$

6.7. $r = 2$ dm, $H = 5$ dm

6.8. 5 : 8

6.9. 90°

6.10. $P = \frac{600 + 400\pi\sqrt{3}}{\pi}$

6.11. a) 1152π cm^3 b) 450π cm^3 c) $\frac{128}{3}\pi$ cm^3

6.12. 2366π cm^3

6.13. 7776π cm^3

6.14. $3\sqrt[4]{27}\pi$ dm^3

6.15. $V_1 : V_2 = 1 : 2$

6.16. 30 cm

6.17. 59 m^3, 87 m^2

6.18. 7 cm

6.19. a) $r = 3$ cm, $h = 6\sqrt{3}$ cm b) $V = 54\pi\sqrt{3}$ cm^3

6.20. a) $18\pi\left(1+2\sqrt{3}\pi\right)$ cm^2, $54\sqrt{3}\pi^2$ cm^3 b) $18\pi(1+2\pi)$ cm^2, $54\pi^2$ cm^3

c) $6\pi\left(3+2\sqrt{3}\pi\right)$ cm^2, $18\sqrt{3}\pi^2$ cm^3

6.21. 36 cm^2

6.22. 300π cm^3

Stożek

6.24. a) 90° b) 72°

6.25. *wskazówka:* Uzasadnij, że kąt wycinka koła tworzącego powierzchnię boczną jest równy: a) 240° b) 180°

6.26. a) 216° b) 40°

6.27. *wskazówka:* Oblicz długość tworzącej oraz kąt α wycinka koła, tworzącego powierzchnię boczną stożka. a) $l = 8$ cm, $\alpha = 135°$ b) $l = 2r$, $\alpha = 180°$

6.28. $h = 2\sqrt{2}$ m, $r = 1$ m

6.29. a) $r = 2$ cm, $h = 4\sqrt{2}$ cm b) $r = 2$ cm, $h = 2\sqrt{3}$ cm

6.30. a) $200\sqrt{2}\pi$ cm^2 b) 240π cm^2

6.31. $5\sqrt{3}$ cm

6.32. 10 cm

6.33. a) 144π dm^2 b) 96π dm^2

6.34. a) 2000π cm^3 b) 1500π cm^3

6.35. a) $P = 90\pi$, $V = 100\pi$ b) $P = 200\pi$, $V = 320\pi$

6.36. $\frac{8400\pi}{29}$ cm^2

6.37. $V = 27\pi$ cm^3, $P = 9\pi\left(3 + 2\sqrt{3}\right)$ cm^2

6.38. $V = 18\pi\sqrt{2}$ cm^3, $P = 18\pi\left(1 + \sqrt{2}\right)$ cm^2

6.39. a) $r = 7$ cm, $H = 24$ cm b) 175π cm^2

6.40. 96π cm^3

6.41. 100π cm^3

Kula i sfera

6.44. a) $P = 144\pi$ cm^2, $V = 288\pi$ cm^3 b) $P = 900\pi$ cm^2, $V = 4500\pi$ cm^3

6.45. a) ok. 28,2 cm b) ok. 6,2 cm

6.46. a) $8P$ b) $6P$

6.47. $n = 26$

6.48. 15 cm, 5 cm

6.49. 900π cm^2, 256π cm^2

6.50. a) 3 b) 9

6.51. a) 10 cm, 7 cm b) 204π cm^2

6.52. a) 34 300 km b) 28 000 km

6.53. ok. 825 km

6.54. $V = 288\pi$ cm^3, $P = 144\pi$ cm^2

6.55. 1600π cm^2

6.56. 3,5 dm

Bryły obrotowe – zadania różne

6.57. $67{,}2\pi$ dm^2

6.58. 1200π cm^3

6.59. $V = 72\pi$ cm^3 $P_c = 40\sqrt{3}\pi$ cm^2

6.60. a) $V = 468\pi$, $P_c = 36\pi\left(6 + \sqrt{2}\right)$ b) $V = 882\pi$, $P_c = 18\pi\left(17 + 8\sqrt{2}\right)$

6.63. $\frac{4\pi}{3}$

6.64. 1 : 4

6.65. $\pi\sqrt{3} : 2$

6.66. 81π cm^3

Podobieństwo figur w przestrzeni

6.67. $k = \frac{5}{12}$

6.68. a) $k = 4$ b) 64 razy

6.69. a) 1 : 4 b) 1 : 7

6.70. 1750 cm^3

6.71. a) 14 cm b) 350 cm^3

6.72. 7 litrów, 19 litrów, 37 litrów

6.73. 64 : 61

6.74. $R = 10$ cm, $r = 4$ cm, skala podobieństwa: 2,5

6.75. $\frac{3}{8}$

6.76. $\frac{7}{27}$

Test sprawdzający do rozdziału 6.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	A	A	B	C	D	D	B	B	B

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

11. 1,5 cm

12. 2 dm lub $\frac{\sqrt{14} - 2}{2}$ dm

13. 25π dm^3

14. 18π dm^3 lub 162π dm^3

15. 224 cm^2

16. a) 90° b) $\sqrt{15}$ c) $\frac{\sqrt{15}}{8}$

17. 189π cm^2

18. 19 : 8

19. 1176π cm^2

20. $V = 240\pi$ cm^3